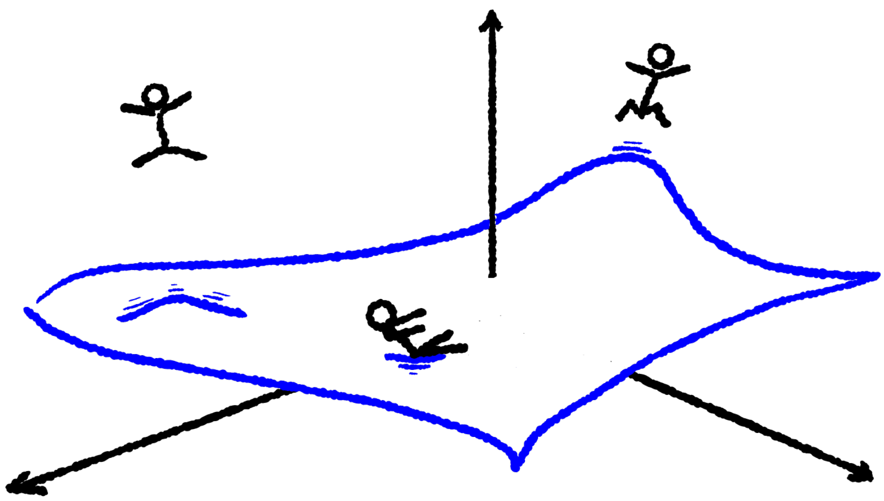
Funktioner af to variable

Version 1.1
10. januar 2023



Mike Vandal Auerbach
www.mathematicus.dk

Funktioner af to variable
Version 1.1, 2023

Disse noter dækker kernestoffet i funktioner af to variable på stx A-niveau efter gymnasiereformen 2017. Idet tangentplaner er kernestof er der også tilføjet to afsnit (som appendiks) om vektorer og planer i rummet. De to afsnit er ikke nødvendige, men giver mere baggrund for forståelsen af begrebet tangentplan.

Enkelte grafer/figurer er markeret med symbolet der fungerer som link til et interaktivt GeoGebra-arbejdsark. Se også www.geogebra.org.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

Indhold

1 Funktioner og grafer

I dette kapitel udvides funktionsbegrebet yderligere. Her ses på funktioner af to variable, dvs. funktioner som har to uafhængige variabel og en afhængig variabel. Funktionens »input« er et punkt (x, y) og dens »output« er et tal z.

Definition 1.1

En funktion f af to variable er en funktion som til et par (x, y) af variable knytter et tal $f(x, y)$.

Definitionsmængden $\mathrm{Dm}(f)$ består af de talpar for hvilke funktionen f er defineret, og værdimængden $\mathrm{Vm}(f)$ er mængden af mulige funktionsværdier.

Det er her værd at bemærke at idet der er to uafhængige variable, x og y, er definitionsmængden ikke en mængde af tal, men en mængde af punkter.

Eksempel 1.2 Funktionen $f(x, y) = x^2 - y + 3$ er en funktion af to variable. Man kan beregne funktionsværdierne i $(1, 4)$ og $(2, -5)$ ved indsættelse i forskriften:

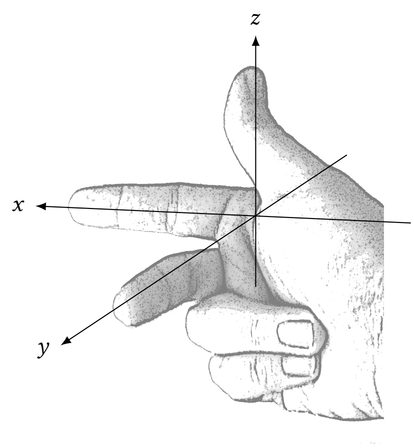
$$\begin{aligned} f(1,4) &= 1^2 - 4 + 3 = 0 \\ f(2,-5) &= 2^2 - (-5) + 3 = 12 \,. \end{aligned}$$

For at man kan tegne grafen for en sådan funktion, har man brug for tre akser: en x-akse, en y-akse og en z-akse. Dvs. man har brug for et koordinatsystem i tre dimensioner.

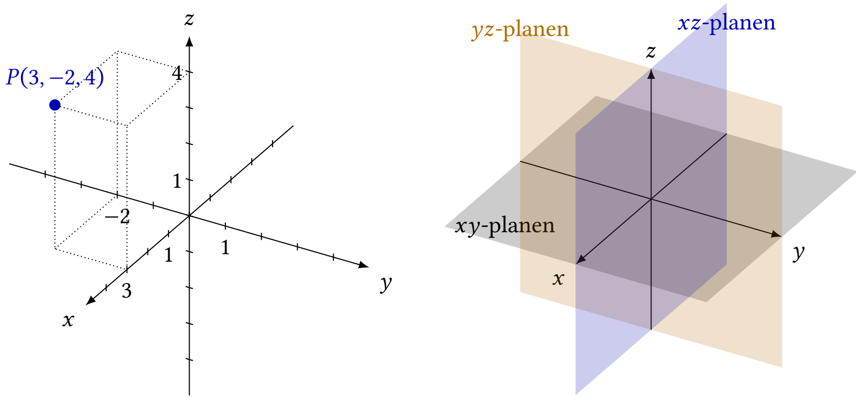
1.1 Koordinatsystemer i tre dimensioner

Det sædvanlige koordinatsystem i planen består af to akser (x-aksen og y-aksen) der står vinkelret på hinanden. Akserne er orienteret sådan at når man bevæger sig fra x-aksen mod y-aksen, foregår bevægelsen mod uret.

For at danne et tredimensionalt koordinatsystem tilføjer man en tredje akse, z-aksen, der står vinkelret på de to andre. Men her skal man træffe et valg for man kan gå vinkelret på x og y i to forskellige gennemløbsretninger. Man vælger at orientere koordinatsystemet så det er et såkaldt *højresystem*. På figur 1.1 kan man se orienteringen af akserne: Lægger man pegefingeren på højre hånd i x-aksens retning og langfingeren i y-aksens, så vil tommelfingeren pege i z-aksens retning.



Figur 1.1: Et højresystem.



(a) Punktet $P(3,-2,4)$.

(b) xy-, xz- og yz-planen.

Figur 1.2: Et punkt i rummet har 3 koordinater, og koordinatsystemet kan opdeles i 3 planer.

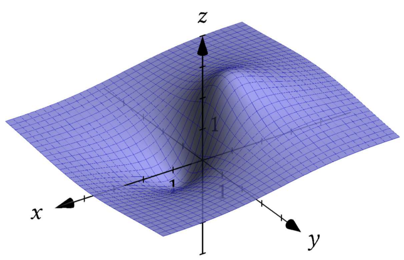
Et punkt P i rummet har tre koordinater $P(x,y,z)$, som tildeles på fuldstændigt samme måde som man tildeler koordinater til et punkt i planen. På figur 1.2(a) ses punktet $P(3,-2,4)$ indtegnet i et tredimensionalt koordinatsystem.

Hvert par af akser definerer en plan i det tredimensionelle koordinatsystem. De punkter hvor z-koordinaten er 0, er punkter i den sædvanlige xy-plan. Mens de punkter hvor enten x- eller y-koordinaten er 0, ligger i hhv. yz- og xz-planen (se figur 1.2(b)).

Når man tegner grafen for en funktion af to variable, afsætter man punkter (x,y,z) i rummet sådan at x og y er de uafhængige variable, mens z-koordinaten sættes lig med den afhængige variabel $f(x,y)$.

Figur 1.3 viser grafen for funktionen

$$f(x,y) = 1 - \frac{3x}{x^2+y^2+1} \ .$$



Figur 1.3: Grafen for en funktion i to variable.

1.2 Definitionsmængder

For en funktion af én variabel angiver definitionsmængden de værdier af den uafhængige variabel x der kan indsættes i funktionsforskriften, f.eks. har funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ definitionsmængden $\mathrm{Dm}(f) = [0;\infty[$ (fordi kvadratrodsfunktionen ikke kan anvendes på negative tal).

For funktioner af 2 variable er situationen lidt mere kompliceret.

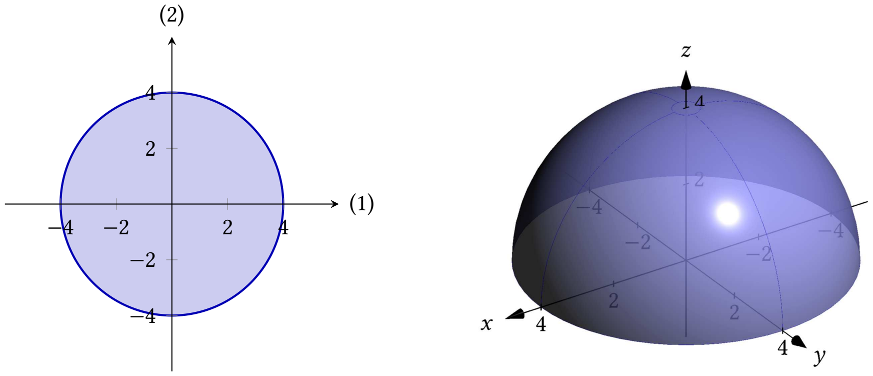
Eksempel 1.3 Definitionsmængden for funktionen

$$f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

består af de punkter (x,y) for hvilke $16 - x^2 - y^2 \geq 0$, dvs.

$$\mathrm{Dm}(f) = \left\{ (x,y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 16 \right\} \ ,$$

som læses »definitionsmængden for funktionen f består af de punkter (x,y) hvorom der gælder at $x^2 + y^2 \leq 16$«.



Figur 1.4: Definitionsmængden og grafen for funktionen $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

Punktmængden består af de punkter der ligger inden for cirklen med centrum i $(0,0)$ og radius 4. Definitionsmængden og grafen kan ses på figur 1.4.

I eksemplet ovenover kan definitionsmængden beskrives med en ligning i x og y. I nogle tilfælde kan man dog beskrive definitionsmængden ved at angive x-værdier og y-værdier separat.

Eksempel 1.4 For funktionen $f(x,y) = \ln(x) + y$ må $x \in \,]0;\infty[$ og $y \in \mathbb{R}$, dvs.

$$\mathrm{Dm}(f) = \,]0;\infty[\, \times \mathbb{R} \, .$$

Denne skrivemåde betyder at x-værdierne kan komme fra det første interval ($]0;\infty[$), og y-værdierne kan komme fra det andet interval ($\mathbb{R}$).

I eksemplet ovenfor er definitionsmængden en såkaldt produktmængde (intervaller med $\times$ imellem). En sådan punktmængde er et (evt. ubegrænset) rektangel i xy-planen. Hvis der ikke er nogen begrænsning på x- og y-værdierne for en funktion, er definitionsmængden $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der også skrives som $\mathbb{R}^2$.

1.3 Øvelser

Øvelse 1.1
Funktionen f er givet ved

$$f(x,y) = x^2 - xy + 4x \, .$$

a) Bestem $f(3,2)$ og $f(-4,1)$.

b) Løs ligningen $f(1,y) = 17$.

c) Løs ligningen $f(x,3) = 6$.

Øvelse 1.2
Funktionen f er givet ved

$$f(x,y) = \frac{2y}{x^2+3} \, .$$

a) Bestem koordinaterne til punktet $P(1,5,f(1,5))$.

b) Brug et CAS-værktøj til at tegne grafen for f samt punktet P.

Øvelse 1.3
Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x,y) = \sqrt{7 - x^2 + y^2}\ .$$

a) Tegn grafen for f.

b) Beregn $f(1,1)$, $f(-1,2)$, $f(3,4)$, og afsæt de tilsvarende punkter på grafen.

Øvelse 1.4
Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x,y) = x + y^2 - 3xy\ .$$

Afgør hvilke af de nedenstående punkter der ligger på grafen:

a) $A(1,1,-1)$
b) $B(0,5,6)$
c) $C(3,2,5)$
d) $D(2,4,-6)$

Øvelse 1.5
Bestem definitionsmængden for funktionen

$$f(x,y) = \ln(5 - x^2 + y)\ ,$$

og illustrer mængden i xy-planen vha. et CAS-værktøj.

Øvelse 1.6
Bestem definitionsmængden for funktionerne

a) $f(x,y) = \sqrt{x} + y + 5$

b) $g(x,y) = \ln(3x) + \frac{1}{y}$

c) $h(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$

2 Snitkurver

For funktioner i én variabel kan man bestemme den afhængige variabel, når man kender den uafhængige, og man kan løse en ligning for at bestemme hvilke værdier af den uafhængige variabel der giver bestemte værdier af den afhængige. Dvs. på grafen kan man bestemme y når man kender x, eller bestemme hvilke værdier af x der giver en bestemt værdi af y.

For funktioner af to variable er situationen lidt mere kompliceret idet der er to uafhængige variable. Holder man x fast, kan y således stadig variere frit – og omvendt kan x variere frit når man holder y fast. Man definerer derfor de såkaldte *snitfunktioner*.

Definition 2.1

For en funktion $f(x, y)$ defineres de to *snitfunktioner*

- $g(x) = f(x, y_0)$ hvor $y = y_0$ holdes fast, og
- $h(y) = f(x_0, y)$ hvor $x = x_0$ holdes fast.

Graferne for snitfunktionerne kaldes *snitkurver*.

Eksempel 2.2 Figur 2.1 viser grafen for funktionen

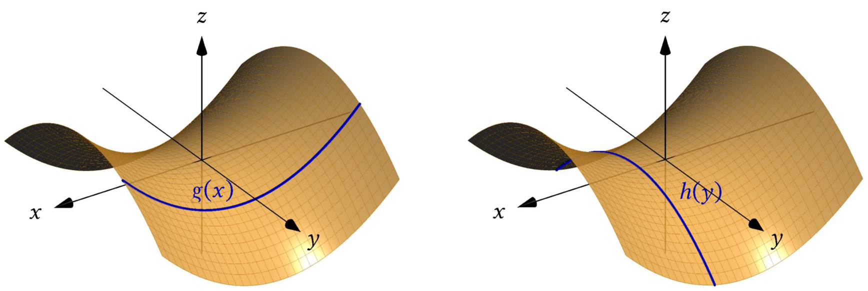
$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{8} .$$

Snitfunktionen for $y = 2$ har forskriften

$$g(x) = f(x, 2) = \frac{x^2 - 2^2}{8} = \frac{x^2 - 4}{8} ,$$

og snitfunktionen for $x = 1$ har forskriften

$$h(y) = f(1, y) = \frac{1^2 - y^2}{8} = \frac{1 - y^2}{8} .$$

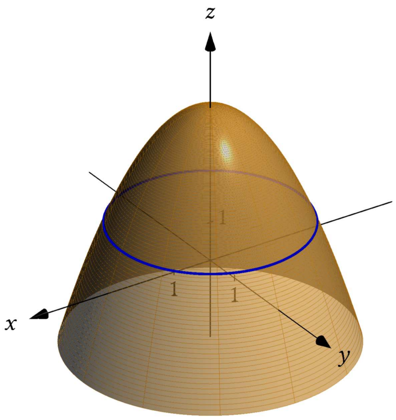


Figur 2.1: Snitkurver. Graferne for funktionerne $g(x)$ (dvs. med fastholdt y) og $h(y)$ (med fastholdt x).

Graferne for de to snitfunktioner (snitkurverne) kan også ses på figuren.

2.1 Niveaukurver og konturplot

I sidste afsnit blev snitkurver i x- og y-aksernes retning defineret. Man kan også undersøge grafen for en fast værdi af z. Herved finder man de såkaldte *niveaukurver*. En niveaukurve repræsenterer således et vandret snit gennem grafen, og punkterne på kurven er de punkter på grafen for f der har samme funktionsværdi.



Figur 2.2: Niveaukurve på grafen for en funktion af to variable.

Definition 2.3

Lad $f(x, y)$ være en funktion af to variable. En *niveaukurve* hørende til værdien $k \in \mathrm{Vm}(f)$ er kurven givet ved ligningen

$$f(x, y) = k \ .$$

Eksempel 2.4 Figur 2.2 viser grafen for funktionen

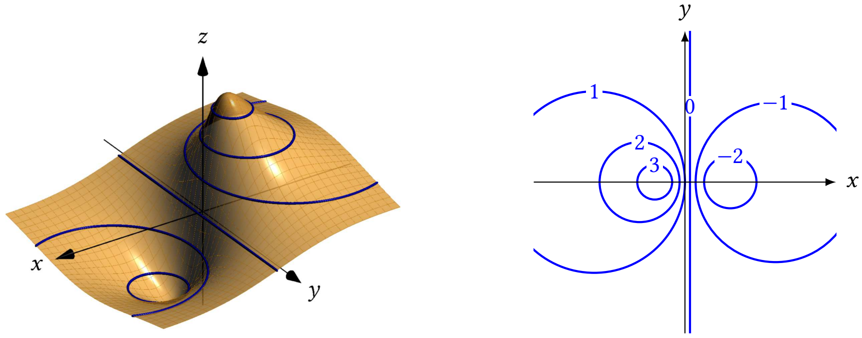
$$f(x, y) = 4 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \ .$$

Niveaukurven med ligningen $f(x, y) = 1$ er også tegnet på figuren. Denne niveaukurve viser sig at være en cirkel idet

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 \qquad \Leftrightarrow \\ 4 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} &= 1 \qquad \Leftrightarrow \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} &= 3 \qquad \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 &= 6 \ . \end{aligned}$$

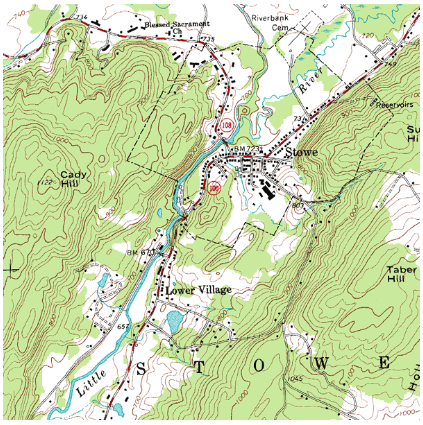
Det viser sig altså at niveaukurven $f(x, y) = 1$ er en cirkel med centrum i $(0, 0)$ og radius $\sqrt{6}$.

Figur 2.3 viser grafen for en funktion af to variable hvorpå der er tegnet en række niveaukurver. Til højre for grafen ses niveaukurverne projiceret ned i xy-planen. Et sådan xy-plot af niveaukurver kaldes et *konturplot*. På konturplottet kan man angive for de enkelte niveaukurver hvilken højde de svarer til.



Figur 2.3: Niveaukurver på grafen for en funktion af to variable (til venstre) samt konturplot (til højre).

De såkaldte højdekurver på landkort er faktisk et konturplot. Her tegner man en sammenhængende kurve der går gennem alle de punkter der har samme højde. På denne måde kan man angive højde på et fladt kort. Man kan så se at de steder hvor højdekurverne ligger tæt, er landskabet meget stejlt, mens der er forholdsvist fladt når der er langt mellem højdekurverne (se figur 2.4).



Figur 2.4: Højdekurver på et landkort angiver landskabets højde over havet.[1]

2.2 Øvelser

Øvelse 2.1
Funktionen f er givet ved

$$f(x,y) = x^2 + xy - 4\ .$$

Bestem en forskrift for de to snitfunktioner

a) $g(x) = f(x,3)$ b) $h(y) = f(-2,y)$

Øvelse 2.2
Funktionen f er givet ved

$$f(x,y)\sqrt{4 - x^2 - y^2}\ .$$

a) Bestem en forskrift for snitfunktionen $g(x)$ hvor $y = 3$ er konstant.

b) Brug et CAS-værktøj til at tegne graferne for $f(x,y)$ og $g(x)$.

Øvelse 2.3
Funktionen f er givet ved

$$f(x,y) = 3x - \frac{2y}{x^2+1}\ .$$

a) Bestem de snitkurver der går gennem punktet $P(1,3,f(1,3))$.

Øvelse 2.4
Bestem en ligning for niveaukurven $f(x,y) = 3$ for funktionen

$$f(x,y) = x^2 + 2y\ .$$

Hvilken type figur er denne niveaukurve?

Øvelse 2.5
Funktionen f er givet ved

$$f(x,y) = 3 \cdot \mathrm{e}^{-x^2-2y^2}\ .$$

a) Bestem en ligning for niveaukurven $f(x,y) = 1$.

b) Brug et CAS-værktøj til at tegne grafen for f samt niveaukurven.

Øvelse 2.6
Funktionen f er givet ved

$$f(x,y) = x(y-1) - \tfrac{1}{4}y^2\ .$$

a) Tegn et konturplot for $z = -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Afledte funktioner 3

For en funktion f af én variabel kan man bestemme tangentens hældning ved at beregne differentialkvotienten f'.

Ser man på grafen for en funktion af to variable $f(x, y)$, bliver sagen mere kompliceret idet man kan nærme sig et punkt fra uendeligt mange forskellige retninger. I et punkt har man derfor også uendeligt mange forskellige tangenthældninger og uendeligt mange tangentlinjer. To af disse har dog særlig interesse, nemlig tangenthældningerne i x-aksens og y-aksens retninger. Disse tangenthældninger svarer til tangenthældningen af en snitkurve i hhv. x- og y-aksens retning, hvilket den følgende definition afspejler.

Definition 3.1

For en funktion af to variable $f(x, y)$ med differentiable snitfunktioner $g(x)$ og $h(y)$ definerer man de partielle afledte

$$f'_x(x, y) = g'(x) \quad \text{og} \quad f'_y(x, y) = h'(y) \; .$$

De partielle afledte betegnes også $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Man finder altså et udtryk for de to partielle afledte ved at differentiere $f(x, y)$ for fastholdt y hhv. fastholdt x.

Eksempel 3.2 En funktion af to variable er givet ved

$$f(x, y) = xy^2 + 6\sqrt{x} \; .$$

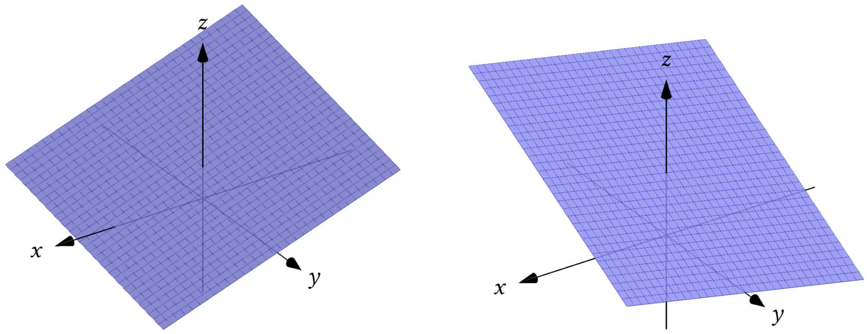
Den partielle afledte mht. x får man ved at differentiere dette udtryk hvor y holdes konstant. Det første led xy^2 skal altså opfattes som $x \cdot k$ hvor k er konstant – og da $(x \cdot k)' = k$ får man i alt:

$$f'_x(x, y) = y^2 + 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = y^2 + \frac{3}{\sqrt{x}} \; .$$

Når man finder den partielle afledte mht. y er x konstant, dvs. det sidste led differentieres til 0, og man får:

$$f'_y(x, y) = x \cdot 2y + 0 = 2xy \; .$$

De partielle afledte i et punkt (x_0, y_0, z_0) på grafen for en funktion f af to variable bliver så tangenthældningen til grafen for $f(x, y)$ i hhv. x-aksens og y-aksens retning.



Figur 3.1: Planer i rummet.

3.1 Tangentplaner

For en differentiabel funktion i én variabel kan man bestemme en entydig tangent til grafen i et punkt. Funktioner af to variable har derimod mange tangenter i et givet punkt på grafen – og disse tangenter udspænder en plan.

I appendix B gennemgås teorien for planer i rummet, her anføres blot en sætning omkring planers ligning. Figur 3.1 viser nogle eksempler på planer i rummet.

Sætning 3.3

En ikke-lodret plan i rummet er givet ved ligningen

$$z = ax + by + c\ .$$

En ikke-lodret plan kan ses som en funktion af to variable

$$f(x,y) = ax + by + c\ .$$

Snitfunktionerne planen i hhv. x- og y-retningen bliver

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x,y_0) = ax + by_0 + c = ax + (by_0 + c) \quad \text{og} \\ h(y) &= f(x_0,y) = ax_0 + by + c = by + (ax_0 + c)\ . \end{aligned}$$

Af disse udtryk fremgår det at snitkurverne er rette linjer i hhv. xz- og yz-planen med hældningskoefficient a og b, dvs. tallet a er hældningskoefficienten i x-aksens retning, mens tallet b er hældningskoefficienten i y-aksens retning.

Der kan ikke bestemmes en entydig tangentlinje til grafen i et punkt, men ud fra de partielle afledte kan man bestemme en tangent*plan* der udspændes af alle tangentlinjerne. Tangentplanens ligning er så givet ved den følgende sætning.

Sætning 3.4

Lad der være givet en differentiabel funktion $f(x,y)$. Tangentplanen til grafen for $f(x,y)$ i punktet $P(x_0,y_0,z_0)$ er givet ved ligningen

$$z = p(x - x_0) + q(y - y_0) + z_0\ ,$$

hvor $p = f'_x(x_0,y_0)$, $q = f'_y(x_0,y_0)$ og $z_0 = f(x_0,y_0)$.

Et grundigt bevis for sætningen kan ses i afsnit B.3, her gives i stedet gives et eksempel.

Eksempel 3.5 Grafen for funktionen

$$f(x, y) = \sqrt{91 - 4x - 2x^2 - y^2} - 7$$

kan ses på figur 3.2. De partielle afledte for denne funktion er

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{-2 - 2x}{\sqrt{91 - 4x - 2x^2 - y^2}} \quad \text{og} \\ f'_y(x, y) &= \frac{-y}{\sqrt{91 - 4x - 2x^2 - y^2}} \ . \end{aligned}$$

I punktet $P(1, 2, f(1, 2))$ er z-koordinaten

$$z_0 = f(1, 2) = \sqrt{91 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 - 2^2} - 7 = 2 \ ,$$

og de partielle afledte har værdierne

$$\begin{aligned} p = f'_x(1,2) &= \frac{-2 - 2 \cdot 1}{\sqrt{91 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 - 2^2}} = -\tfrac{4}{9} \quad \text{og} \\ q = f'_y(1,2) &= \frac{-2}{\sqrt{91 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 - 2^2}} = -\tfrac{2}{9} \ . \end{aligned}$$

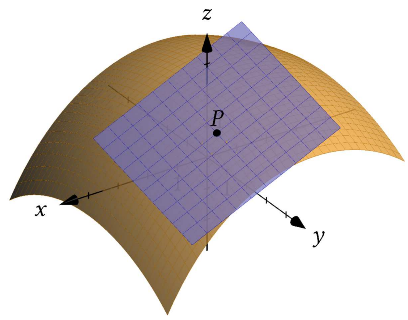
Dvs. tangentplanen i punktet $P(1, 2, 2)$ har ligningen

$$z = -\tfrac{4}{9}(x - 1) - \tfrac{2}{9}(y - 2) + 2$$

som kan reduceres til

$$z = -\tfrac{4}{9}x - \tfrac{2}{9}y + \tfrac{26}{9} \ .$$

Et udsnit af tangentplanen kan ses sammen med grafen på figur 3.2.



Figur 3.2: Grafen for en funktion af to variable samt (et udsnit af) tangentplanen i punktet P.

Ud fra de partielle afledte i et punkt kan man definere en vektor i planen (den såkaldte *gradient*) som har de partielle afledte som koordinater.[1]

[1]Tegnet ∇ i notationen nedenfor kaldes »nabla« efter det græske ord νάβλα (nábla) »fønikisk harpe« fordi symbolet lidt ligner dette instrument.[2]

Definition 3.6

For en differentiabel funktion $f(x, y)$ defineres *gradienten* i et punkt (x_0, y_0) til at være vektoren

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \ .$$

De partielle afledte f'_x og f'_y er – som beskrevet ovenfor – afledte i hhv. x- og y-aksens retning. Gradienten spiller en rolle hvis man vil bestemme den afledte i en vilkårlig retning.

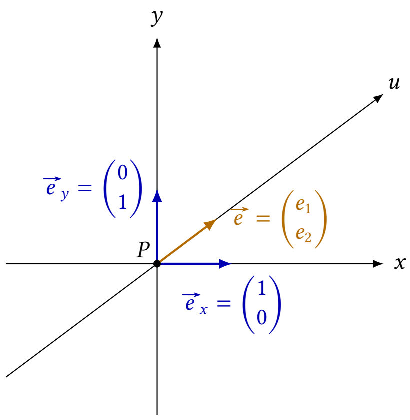
Ser man på et punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ på grafen for en funktion $f(x, y)$ af to variable, kan man tegne en xy-plan med dette punkt som origo. Figur 3.3 viser en sådan plan set ovenfra. Tangentlinjen til grafen for f i x-aksens retning vil (set ovenfra) være en ret linje i x-aksens retning i denne plan; tilsvarende vil tangentlinjen til grafen for f i y-aksens retning være en ret linje i y-aksens retning. Hældningskoefficienten i x-aksens retning er givet ved $f'_x(x_0, y_0)$, og tilsvarende er hældningskoefficienten i y-aksens retning givet ved $f'_y(x_0, y_0)$.

Disse hældningskoefficienter kan skrives som

$$f'_x(x_0, y_0) = \nabla f \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla f \bullet \vec{e}_x \quad \text{og}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \nabla f \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \nabla f \bullet \vec{e}_y$$

hvor $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$ er enhedsvektorer i hhv. x- og y-aksens retninger.



Figur 3.3: En xy-plan med punktet P på grafen som origo. u-aksen er en akse i en vilkårlig retning med enhedsvektor $\vec{e}$.

På figur 3.3 ses også tangentlinjen i en vilkårlig retning i xy-planen. Ud fra ovenstående giver det mening at hældningskoefficienten for denne linje er givet ved

$$f'_u(x_0, y_0) = \nabla f \bullet \vec{e}$$

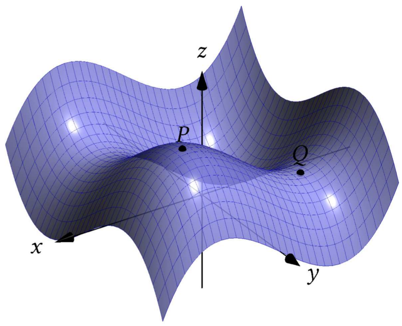
hvor $\vec{e}$ er en enhedsvektor der er retningsvektor for denne linje i xy-planen.

Skalarproduktet $\nabla f \bullet \vec{e} = |\nabla f| \cdot |\vec{e}| \cdot \cos(v)$ hvor v er vinklen mellem ∇f og $\vec{e}$. Den største værdi af dette skalarprodukt fås derfor når $\cos(v) = 1$ – altså når de to vektorer ∇f og $\vec{e}$ er parallelle. Heraf følger den næste sætning.

Sætning 3.7

I punktet $P(x_0, y_0, z_0)$ på grafen for en funktion af to variable er hældningskoefficienten størst i retning af gradienten $\nabla f(x_0, y_0)$.

3.2 Stationære punkter

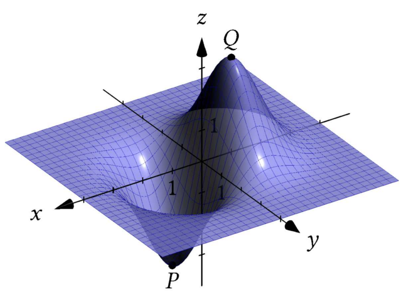


Figur 3.4: En graf med både et maksimum (P) og et saddelpunkt (Q).

Figur 3.4 viser grafen for en funktion af to variable. Denne funktion har et maksimum i punktet P. Det viser sig (hvilket ikke bevises her) at i et maksimum er tangentplanen parallel med xy-planen. Det samme gælder for et minimum. I disse punkter gælder der derfor at gradienten er lig nulvektoren. De punkter på grafen hvor $\nabla f = \vec{0}$ kaldes *stationære punkter*.

Definition 3.8

Hvis $P(x_0, y_0, z_0)$ er et punkt på grafen for en funktion $f(x, y)$ af to variable, og $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$, kaldes P et *stationært punkt*.



Figur 3.5: En graf med to stationære punkter.

Et maksimum eller et minimum på en graf vil altid være et stationært punkt, men ikke alle stationære punkter er maksima eller minima – der kan også være tale om et såkaldt *saddelpunkt* (punktet Q på figur 3.4 er et eksempel på et saddelpunkt).

Man kan bestemme arten af et stationært punkt ved at analysere grafen for funktionen som i det følgende eksempel.

Eksempel 3.9 Grafen for funktionen

$$f(x, y) = -5xe^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

kan ses på figur 3.5. På grafen ser det ud som om der er to stationære punkter. For at bestemme koordinaterne til disse punkter bestemmer man de to partielle afledte

$$f'_x(x,y) = -5\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} - 5x(-x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = (5x^2-5)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$
$$f'_y(x,y) = -5x(-y)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = 5xy\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \ .$$

I stationære punkter er $\nabla f = \vec{0}$, dvs. $f'_x(x,y) = 0$ og $f'_y(x,y) = 0$, altså

$$(5x^2-5)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = 0 \quad \text{og}$$
$$5xy\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = 0 \ .$$

Løser man dette ligningssystem, finder man løsningerne

$$(x = 1 \wedge y = 0) \quad \vee \quad (x = -1 \vee y = 0) \ .$$

De to løsninger svarer til punkterne $P(1,0,f(1,0))$ og $Q(-1,0,f(-1,0))$ som kan ses på figur 3.5. Man kan tydeligt se på grafen at P er et minimum og Q er et maksimum.

Hvis man ikke kan afgøre ud fra grafen om et givet stationært punkt er et ekstremum eller et saddelpunkt, kan man (i de fleste situationer) regne sig frem til det. Hertil har man brug for de *dobbeltafledte* af funktionen f.

Definition 3.10

For en funktion $f(x,y)$ af to variable, definerer man de *dobbeltafledte* mht. x og y som de funktioner man får ved at differentiere de afledte f'_x og f'_y mht. hhv x og y:

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x \quad \text{og} \quad f''_{yy} = (f'_y)'_y \ .$$

De blandede afledte defineres som de funktioner man får når man differentierer først mht. x og dernæst mht. y, eller omvendt:[2]

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y \quad \text{og} \quad f''yx = (f'_y)'_x \ .$$

[2]Det viser sig dog at hvis de partielle afledte er kontinuerte funktioner, så er $f''_{xy} = f''_{yx}$, dvs. i disse tilfælde findes der kun én blandet afledt.

I sidste afsnit blev det vist at en hældningskoefficienten for en tangentlinje til grafen i en vilkårlig retning kan findes som

$$f'_u = \nabla f \bullet \vec{e} = f'_x \cdot e_1 + f'_y \cdot e_2$$

hvor $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ er en enhedsvektor i den valgte retning. Dette definerer samtidig hvordan man differentierer mht. den vilkårlige retning u: Man skal differentiere mht. x og gange med e_1, differentiere mht. y og gange med e_2 – og derefter lægge disse to størrelser sammen.

Hvis et givet stationært punkt er et maksimum eller minimum, må der gælde at den dobbeltafledte f''_u har samme fortegn i alle retninger. Man finder så f''_u ved at differentiere f'_u mht. den vilkårlige retning u:

$$f''_u = (f'_u)'_x \cdot e_1 + (f'_u)'_y \cdot e_2$$

$$
\begin{aligned}
&= (f'_x \cdot e_1 + f'_y \cdot e_2)'_x \cdot e_1 + (f'_x \cdot e_1 + f'_y \cdot e_2)'_y \cdot e_2 \\
&= f''_{xx} \cdot e_1^2 + f''_{yx} \cdot e_2 e_1 + f''_{xy} \cdot e_1 e_2 + f''_{yy} \cdot e_2^2 \\
&= f''_{xx} \cdot e_1^2 + 2 f''_{xy} \cdot e_1 e_2 + f''_{yy} \cdot e_2^2 \\
&= e_2^2 \cdot \left(f''_{xx} \cdot \left(\frac{e_1}{e_2} \right)^2 + 2 f''_{xy} \cdot \frac{e_1}{e_2} + f''_{yy} \right) .
\end{aligned}
$$

Fortegnet for e_2^2 er altid positivt, dvs. fortegnet for f''_u bestemmes af den sidste faktor der er et andengradspolynomium i $\frac{e_1}{e_2}$. Sætter man $r = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $s = f''_{xy}(x_0, y_0)$ og $t = f''_{yy}(x_0, y_0)$, kan dette andengradspolynomium skrives som

$$
r \cdot \left(\frac{e_1}{e_2} \right)^2 + 2s \cdot \frac{e_1}{e_2} + t .
$$

Idet f''_s ikke må ændre fortegn, skal diskriminanten for dette andengradspolynomium være negativ, dvs.

$$
(2s)^2 - 4 \cdot r \cdot t < 0 \quad \Leftrightarrow \quad r \cdot t - s^2 > 0 .
$$

Når denne betingelse er opfyldt, er der altså tale om et ekstremum. Hvis $r < 0$, er f''_u altid negativ, dvs. der er tale om et maksimum. Er $r > 0$ er det et minimum.

Hvis størrelsen $r \cdot t - s^2 < 0$ så har f''_u forskelligt fortegn i forskellige retninger, dvs. der er tale om et saddelpunkt. Er $r \cdot t - s^2 = 0$ er arten af det stationære punkt ikke bestemt; man bliver da nødt til at undersøge punktet grafisk. Den følgende sætning opsummerer dette resultat.

Sætning 3.11

Lad $f(x, y)$ være en funktion af to variable med et stationært punkt $P(x_0, y_0, z_0)$, og sæt

$$
r = f''_{xx}(x_0, y_0) , \quad s = f''_{xy}(x_0, y_0) \quad \text{og} \quad t = f''_{yy}(x_0, y_0) .
$$

Der gælder da at

- hvis $rt - s^2 > 0$, og $r < 0$, er P et maksimum,
- hvis $rt - s^2 > 0$, og $r > 0$, er P et minimum,
- hvis $rt - s^2 < 0$, er P et saddelpunkt, og
- hvis $rt - s^2 = 0$, er arten af P ubestemt.

Eksempel 3.12 Funktionen

$$
f(x, y) = -5x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}
$$

fra eksempel 3.9 har de partielle afledte

$$
\begin{aligned}
f'_x(x, y) &= (5x^2 - 5)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \\
f'_y(x, y) &= 5xy\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} ,
\end{aligned}
$$

så de dobbeltafledte og den blandede afledte er

$$f''_{xx} = (15x - 5x^3)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$
$$f''_{xy} = (5y - 5x^2y)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$
$$f''_{yy} = (5x - 5xy^2)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \ .$$

I punktet P er $x = 1$ og $y = 0$, dvs.

$$r = f''_{xx}(1,0) = (15 \cdot 1 - 5 \cdot 1^3)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(1^2+0^2)} = \frac{10}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$
$$s = f''_{xy}(1,0) = (5 \cdot 0 - 5 \cdot 1^2 \cdot 0)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(1^2+0^2)} = 0$$
$$t = f''_{yy}(1,0) = (5 \cdot 1 - 5 \cdot 1 \cdot 0^2)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(1^2+0^2)} = \frac{5}{\sqrt{\mathrm{e}}} \ ,$$

og

$$r \cdot t - s^2 = \frac{10}{\sqrt{\mathrm{e}}} \cdot \frac{5}{\sqrt{\mathrm{e}}} - 0^2 = \frac{50}{\mathrm{e}} > 0 \ .$$

Idet $r \cdot t - s^2 > 0$ og $r > 0$, er det vist at punktet $P(1, 0, f(1,0))$ er et minimum.
En tilsvarende analyse kan gennemføres for punktet Q.

3.3 Øvelser

Øvelse 3.1
En funktion f er givet ved

$$f(x,y) = 3x^2 + xy - \frac{x}{y} \ .$$

a) Bestem $f'_x(x,y)$ og $f'_y(x,y)$.

b) Bestem $f'_x(2,3)$ og $f'_y(4,1)$.

Øvelse 3.2
En funktion f er givet ved

$$f(x,y) = \tfrac{1}{4}x^2 - \cdot xy \ .$$

a) Bestem f'_x og f'_y.

b) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f i punktet $P(2, 1, f(2,1))$.

c) Brug et CAS-værktøj til at tegne grafen for f samt tangentplanen.

Øvelse 3.3
En funktion f er givet ved

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + 3x \ .$$

Bestem ligninger for tangentplanerne i disse punkter:

a) $A(1, 1, f(1,1))$

b) $B(-1, 3, f(-1,3))$

c) $C(2, 4, f(2,4))$

d) $D(3, -1, f(3,-1))$

Øvelse 3.4
En funktion f er givet ved

$$f(x,y) = xy^2 + yx^2 - 3y^2 \ .$$

a) Bestem f'_x og f'_y.

b) Bestem koordinaterne til funktionens stationære punkter.

Øvelse 3.5
Funktionen f er givet ved

$$f(x,y) = x \cdot e^y \ .$$

a) Vis at f ikke har stationære punkter.

Øvelse 3.6
For en funktion f af to variable er

$$f''_{xx}(x,y) = 18x+2y \ , \quad f''_{xy} = 2x-3 \quad \text{og} \quad f''_{yy}(x,y) = -2 \ .$$

Funktionen har et stationært punkt i $(-3, 9, 4)$.

a) Bestem arten af det stationære punkt.

Øvelse 3.7
Funktionen f er givet ved

$$f(x,y) = x^3 + 3y - y^3 - 3x \ .$$

a) Bestem de dobbeltafledte og den blandede afledte af f.

b) Bestem de stationære punkter for f.

c) Bestem arten af de stationære punkter.

Øvelse 3.8
Bestem de stationære punkter og arten af disse for funktionen

$$f(x,y) = \frac{xy - x}{x^2 + y^2 + 1} \ .$$

A Vektorer i rummet

Det er muligt at udvide mange af definitionerne for vektorer i planen til vektorer i rummet. En vektor i rummet har tre koordinater frem for to, men derudover gælder mange af de samme resultater for vektorer i rummet som for vektorer i planen.

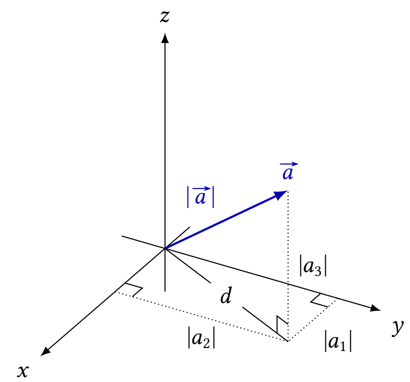
Definition A.1

En vektor i rummet er en matematisk størrelse der angiver en bevægelse i rummet vha. tre koordinater

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} .$$

De tre koordinater angiver bevægelsen langs hhv. x-, y- og z-aksen.

En vektor er altså en størrelse i rummet der kan beskrives med en længde og en retning. Her skal man være opmærksom på at retningen nu er i tre dimensioner, dvs. der er mange flere muligheder. Længden af en vektor beregnes i øvrigt analogt til metoden i to dimensioner.



Figur A.1: Længden af en vektor kan beregnes ud fra koordinaterne a_1, a_2 og a_3.

Sætning A.2

Hvis vektoren $\vec{a}$ har koordinaterne $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, så er

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} .$$

Bevis

På figur A.1 ses vektoren $\vec{a}$ tegnet ind i et koordinatsystem. I xy-planen ses en retvinklet trekant med sidelængderne $|a_1|$ og $|a_2|$,[1] dvs. længden af hypotenusen d kan beregnes vha. Pythagoras' sætning:

$$d^2 = a_1^2 + a_2^2 .$$

Men stykket d er også katete i den retvinklede trekant hvor $|\vec{a}|$ er hypotenuse. Her er længden af den anden katete $|a_3|$, dvs.

$$|\vec{a}|^2 = d^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 ,$$

og derfor er

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} . \qquad \blacksquare$$

[1] Man tager den numeriske værdi af koordinaterne for at finde længden idet koordinaterne kan være negative.

Idet vektorer defineres på samme måde i rummet som i planen, kan man også definere summen af to vektorer og differensen mellem dem på fuldstændigt samme måde.

En hel række sætninger kan derfor bevises på fuldstændigt samme måde som de tilsvarende sætninger for vektorer i planen, og de bevises derfor ikke her. Der gælder bl.a. følgende 3 sætninger:

Sætning A.3

Hvis $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er vektorer gælder

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. (den *kommutative* lov)
2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. (den *associative* lov)

Sætning A.4: Indskudssætningen

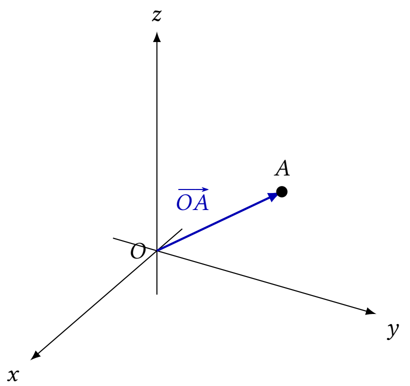
Hvis A, B og C er tre punkter i planen, så er

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} .$$

Sætning A.5

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er vektorer, og t og s er tal, så gælder

1. $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.
2. $(t+s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$.
3. $(ts)\vec{a} = t(s\vec{a})$.
4. $t\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = t\vec{a} + t\vec{b}$.



Figur A.2: Stedvektoren $\overrightarrow{OA}$ til punktet A.

Begyndelsespunktet i rummet er lige som i planen *origo* som er det punkt hvor akserne krydser hinanden. Dette punkt har i rummet koordinaterne $O(0,0,0)$. Ud fra dette punkt kan man lige som i planen definere en *stedvektor* til et punkt A i rummet (se figur A.2).

Definition A.6

Hvis $A(x_0, y_0, z_0)$ er et punkt i rummet, defineres *stedvektoren* til punktet som

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} .$$

$\overrightarrow{OA}$ er vektoren fra $O(0,0,0)$ til $A(x_0, y_0, z_0)$.

Koordinaterne for en vektor der går mellem punkterne $A(x_1, y_1, z_1)$ og $B(x_2, y_2, z_2)$ kan beregnes ved hjælp af den følgende sætning.

Sætning A.7

Vektoren $\overrightarrow{AB}$ mellem punkterne $A(x_1, y_1, z_1)$ og $B(x_2, y_2, z_2)$ har koordinaterne

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} .$$

Beviset for denne sætning forløber fuldstændigt som beviset for den tilsvarende sætning i planen.

A.1 Skalarprodukt

Lige som for vektorer i planen, kan man definere *skalarproduktet* af to vektorer i rummet.

Definition A.8

Hvis de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} ,$$

defineres *skalarproduktet* af de to vektorer som tallet

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_2 .$$

Ved at regne med koordinater kan man bevise følgende regneregler:

Sætning A.9

Hvis $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er vektorer i rummet, gælder der

1. $\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|^2$. (længde og skalarprodukt)
2. $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$. (den *kommutative* lov)
3. $\vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$. (den *distributive* lov)
4. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}$. (den *distributive* lov)
5. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2\vec{a} \bullet \vec{b}$.
6. $\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a} \bullet \vec{b}$.
7. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 - \left|\vec{b}\right|^2$.

Bevis
Beviset kan udføres på samme måde som beviset for den tilsvarende sætning i planen, dvs. ved regning med koordinater. Her bevises 4 og 6.

Hvis $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ har koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

så er

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \vec{c} &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 \\
&= a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 + a_3c_3 + b_3c_3 \\
&= a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\
&= \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}\,.
\end{aligned}$$

Hermed er 4 bevist.

Desuden får man

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} - \vec{b}\right) &= \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \\
&= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 \\
&= a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 + a_2^2 + b_2^2 - 2a_2b_2 + a_3^2 + b_3^2 - 2a_3b_3 \\
&= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\
&= |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a} \bullet \vec{b}\,.
\end{aligned}$$

Dvs. nu er 6 også bevist. ■

Skalarproduktet har på samme måde som i planen en sammenhæng med vinklen mellem de to vektorer. Der gælder altså

Sætning A.10

Hvis v er vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, så er

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}\,.$$

Eksempel A.11 Her bestemmes vinklen mellem de to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Først beregnes længden af hver vektor, samt deres skalarprodukt:

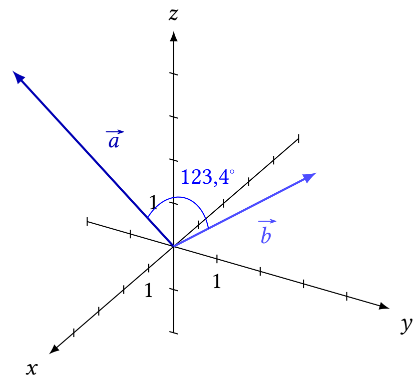
$$\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{38} \\
\left|\vec{b}\right| &= \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{17}
\end{aligned}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 3 \cdot (-4) + (-2) \cdot 1 + 5 \cdot 0 = -14 \,.$$

Vinklen v mellem de to vektorer er så

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-14}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{17}}\right) = 123{,}4^\circ \,.$$

De to vektorer og vinklen kan ses på figur A.3.



Figur A.3: Vinklen mellem vektor $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Idet skalarproduktet virker fuldstændigt ligesom i planen gælder der også følgende to sætninger om skalarproduktet og projektion af vektorer:

Sætning A.12

Lad v være vinklen mellem de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Der gælder da

1. Hvis $\vec{a} \bullet \vec{b} > 0$, så er $0^\circ \leq v < 90^\circ$.
2. Hvis $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$, så er $v = 90^\circ$, dvs. $\vec{a} \perp \vec{b}$.
3. Hvis $\vec{a} \bullet \vec{b} < 0$, så er $90^\circ < v \leq 180^\circ$.

Sætning A.13

For projektionen $\vec{a}_{\vec{b}}$ af vektor $\vec{a}$ på $\vec{b}$, gælder at

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\,\vec{b} \,,$$

og

$$\left|\vec{a}_{\vec{b}}\right| = \frac{\left|\vec{a} \bullet \vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|} \,.$$

Eksempel A.14 Her ses på de to vektorer

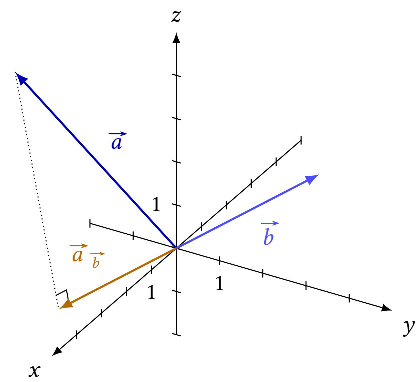
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

fra eksempel A.11. Her blev det beregnet, at

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = -14 \qquad \text{og} \qquad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{17} \,,$$

dvs. projektionen $\vec{a}_{\vec{b}}$ af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{-14}{\sqrt{17}^2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{56}{17} \\ -\frac{14}{17} \\ 0 \end{pmatrix} .$$



Figur A.4: Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

De to vektorer og projektionen kan ses på figur A.4.

A.2 Vektorprodukt

For vektorer i planen kan man beregne en determinant. Dette er ikke muligt for vektorer i rummet. Til gengæld findes der for vektorer i rummet endnu et produkt, der kaldes *vektorproduktet*. Det defineres på følgende måde:

Definition A.15

Lad vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ have koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Man definerer da vektorproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ som vektoren

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Eksempel A.16 Vektorproduktet af de to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

er

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 5 - (-1) \cdot 2 \\ -1 \cdot 0 - 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Beregner man i stedet $\vec{b} \times \vec{a}$, får man

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot 4 - 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -17 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Dvs. $\vec{a} \times \vec{b}$ og $\vec{b} \times \vec{a}$ er altså ikke den samme vektor.

Eksempel A.17 Her beregnes vektorproduktet af de to enhedsvektorer $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$, der har koordinaterne

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Man får

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_z .$$

Dette eksempel viser, at $\vec{e}_x \times \vec{e}_y$ er det samme som enhedsvektoren i z-aksens retning. Dvs. $\vec{e}_x \times \vec{e}_y$ er ortogonal med både $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$, og de tre vektorer

$$\vec{e}_x\,, \quad \vec{e}_y \quad \text{og} \quad \vec{e}_x \times \vec{e}_y$$

danner tilsammen et højresystem (i den rækkefølge).

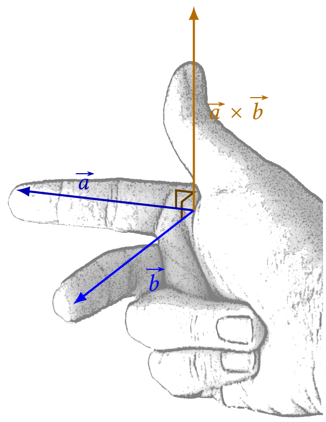
Det viser sig, at dette rent faktisk gælder generelt for vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{a} \times \vec{b}$. Der gælder altså følgende:

Sætning A.18

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to vektorer i rummet. Der gælder da

1. $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ og $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$.
2. $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{a} \times \vec{b}$ danner tilsammen et højresystem.

Placeringen af de tre vektorer i forhold til hinanden kan ses på figur A.5.



Figur A.5: Placeringen af vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{a} \times \vec{b}$ i forhold til hinanden.

Bevis

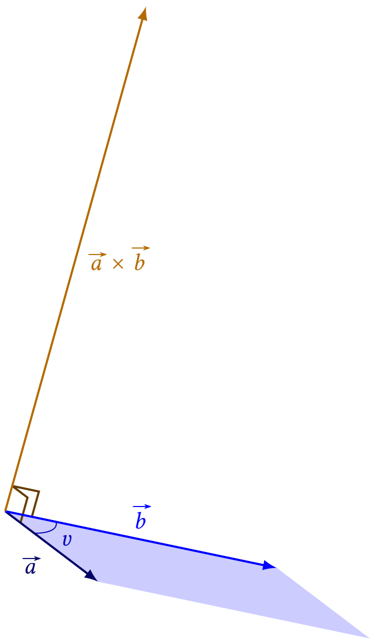
At $\vec{a}$ og $\vec{a} \times \vec{b}$ er ortogonale kan bevises ved at se på deres skalarprodukt. Regner man på koordinaterne, får man

$$\begin{aligned} \vec{a} \bullet \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \\ &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Da skalarproduktet giver 0, er de to vektorer altså ortogonale. At $\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$ kan vises på tilsvarende måde.

Det er ikke helt simpelt at vise, at $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{a} \times \vec{b}$ danner et højresystem, så her gives blot et løst argument.

I eksempel A.17 blev det vist, at det gælder for enhedsvektorerne, dvs. for $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ og $\vec{e}_x \times \vec{e}_y$. Hvis man forestiller sig, at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ roteres så $\vec{a}$ ligger langs med x-aksen, så vil man ud fra dette system kunne vise, at $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{a} \times \vec{b}$ danner et højresystem. Dermed vil det også gælde for de oprindelige vektorer. ■



Figur A.6: Arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er lig længden af $\vec{a} \times \vec{b}$.

Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ er altså en ny vektor, der står vinkelret på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Der gælder også noget specielt for længden af denne vektor, nemlig

Sætning A.19

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to vektorer i rummet, og lad v være vinklen mellem dem. Der gælder da, at

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin(v)\ ,$$

dvs. $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ er arealet af det parallelogram, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ (se figur A.6).

Beviset for sætningen kan gennemføres vha. en uhyggelig mængde algebra, så det udelades her. I stedet følger et eksempel.

Eksempel A.20 Her beregnes arealet af det parallelogram, der udspændes af vektorerne

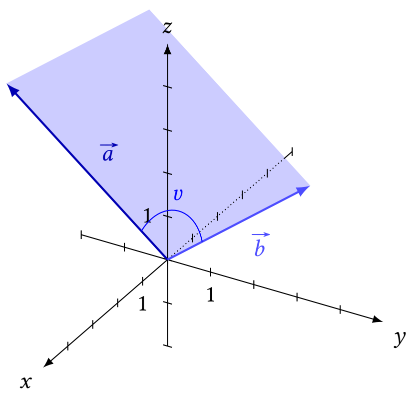
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektorproduktet af de to vektorer er

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 0 - 1 \cdot 5 \\ 5 \cdot (-4) - 0 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 - (-4) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -20 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Længden af denne vektor er

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5 \\ -20 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-20)^2 + (-5)^2} = \sqrt{450} \approx 21{,}2\ .$$



Figur A.7: Parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Arealet af det parallelogram, der udspændes af de to vektorer er altså 21,21 (se figur A.7).

Vinklen mellem disse to vektorer blev bestemt i eksempel A.11 til 123,4°. Arealet af parallelogrammet kan derfor også bestemmes ved at beregne

$$\begin{aligned} |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin(123{,}4^\circ) &= \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sin(123{,}4^\circ) \\ &= \sqrt{38} \cdot \sqrt{17} \cdot \sin(123{,}4^\circ) = 21{,}2\ , \end{aligned}$$

hvilket heldigvis er den samme værdi som før.

Hvis to vektorer er parallelle er vinklen mellem dem 0°. Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, vil arealet af det »parallelogram«, de udspænder, derfor være

$$|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin(0^\circ) = 0\ .$$

Af sætning A.19 følger derfor, at

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = 0\ ,$$

dvs. $\vec{a}\times\vec{b}$ må være nulvektoren $\vec{0}$, da det er den eneste vektor, der har længde 0. Denne argumentation fører til følgende sætning:

Sætning A.21

Hvis de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, så er

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}\ .$$

Eksempel A.22 De to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix}$$

er parallelle. For at se, at dette er korrekt beregnes

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3 & 6\\2 & 4\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}2 & 4\\-1 & -2\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}-1 & -2\\3 & 6\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 4 - 2\cdot 6\\ 2\cdot(-2)-(-1)\cdot 4\\ -1\cdot 6 - 3\cdot(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ .$$

Idet $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$, er $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

Dette kapitel sluttes af med en sætning, der opsummerer de vigtigste regneregler for vektorproduktet:

Sætning A.23

Lad $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være vektorer i rummet, og lad t være et tal. Da gælder

1. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$.
2. $t\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = (t\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times\left(t\vec{b}\right)$.
3. $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.
4. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Regnereglen 1 viser, at vektorproduktet *ikke* er kommutativt, dvs. rækkefølgen er ikke ligegyldig. Regnereglerne 3 og 4 viser til gengæld, at den distributive lov gælder for vektorproduktet. Sætningen kan bevises ved meget lange udregninger med koordinater, så her gives kun et delvist bevis for 1 og 3.

Bevis
Lad vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ have koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} .$$

Hvis $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$ og $\vec{w} = \vec{b} \times \vec{a}$, så gælder der for x-koordinaterne, at

$$\begin{aligned} v_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2 = b_3 a_2 - b_2 a_3 \\ &= -b_2 a_3 + b_3 a_2 = -(b_2 a_3 - b_3 a_2) = -w_1 . \end{aligned}$$

Vha. tilsvarende beregninger på de to andre koordinater, kan man vise, at

$$v_2 = -w_2 \qquad \text{og} \qquad v_3 = -w_3 ,$$

dvs. $\vec{v} = -\vec{w}$, og altså er $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

For at bevise 3, ser man på vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

og sætter

$$\vec{w} = \vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) , \quad \vec{u} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{og} \quad \vec{v} = \vec{a} \times \vec{c} .$$

For x-koordinaterne gælder da, at

$$\begin{aligned} w_1 &= a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2) = a_2 b_3 + a_2 c_3 - a_3 b_2 - a_3 c_2 \\ u_1 + v_1 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) + (a_2 c_3 - a_3 c_2) = a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_2 c_3 - a_3 c_2 . \end{aligned}$$

Ved at sammenligne leddene kan man se at

$$w_1 = u_1 + v_1 .$$

Tilsvarende beregninger for de to andre koordinater giver at

$$w_2 = u_2 + v_2 \qquad \text{og} \qquad w_3 = u_3 + v_3 ,$$

dvs.

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{w} ,$$

og derfor er

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} ,$$

hvilket beviser 3. ■

B Planer

Dette kapitel handler planer i rummet og nogle af deres egenskaber. Afslutningsvist udledes ligningen for en tangentplan til grafen for en funktion af to variable.

Sætning B.1

Lad $A(x_1, y_1, z_1)$ og $B(x_2, y_2, z_2)$ være to punkter i rummet. Afstanden fra A til B er så

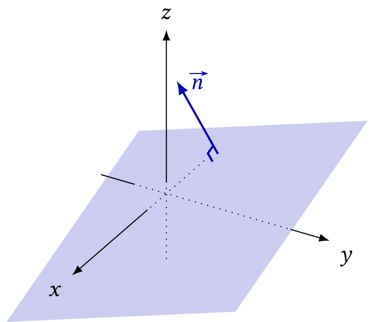
$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Bevis
Afstanden fra A til B er lig med længden af vektoren

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} ,$$

og ifølge sætning A.2 er

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ . \qquad \blacksquare$$



Figur B.1: En plan i rummet og en normalvektor til planen..

På figur B.1 ses et udsnit af en plan i rummet. Der er tale om et udsnit, fordi en plan strækker sig uendeligt langt i koordinatsystemet (lige som en ret linje gør det), og det kan man af gode grunde ikke tegne.

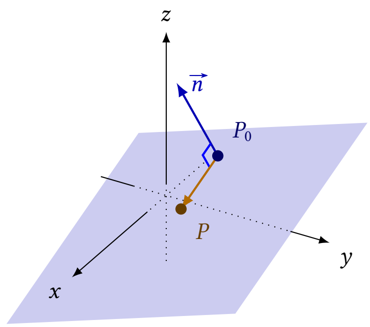
Det viser sig, at en plan i rummet kan beskrives vha. en ligning. For at opstille en sådan ligning har man brug for en normalvektor til planen.

Definition B.2

En normalvektor $\vec{n}$ til en plan er en vektor som er vinkelret på alle vektorer der er parallelle med planen.

En normalvektor til en plan er altså en vektor der står vinkelret på planen (se figur B.1). Kender man en normalvektor og et punkt i planen, er det muligt at opstille en ligning for planen. Antag derfor at normalvektoren har koordinaterne

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} ,$$



Figur B.2: Normalvektoren $\vec{n}$ står vinkelret på vektoren $\overrightarrow{P_0P}$ som ligger i planen.

og det kendte punkt P_0 har koordinaterne $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Hvis $P(x, y, z)$ er et tilfældigt punkt i planen, så står $\vec{n}$ vinkelret på vektoren $\overrightarrow{P_0P}$ (se figur B.2). Dvs.

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Ganger man dette skalarprodukt ud, får man ligningen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

som gælder for ethvert punkt $P(x, y, z)$ der ligger i planen. Man har derfor denne sætning:

Sætning B.3

Hvis planen α har normalvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, og punktet $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ligger i planen, så kan planen beskrives ved ligningen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

der også kan skrives på formen

$$ax + by + cz + d = 0$$

hvor $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Eksempel B.4 Hvis planen α har normalvektoren

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} ,$$

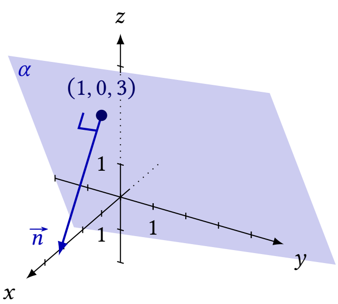
og punktet $(1, 0, 3)$ ligger i planen, så har planen α ligningen

$$4(x - 1) + 1(y - 0) - 2(z - 3) = 0 \ ,$$

som kan reduceres til

$$4x + y - 2z + 2 = 0 \ .$$

Planen og normalvektoren kan ses på figur B.3.



Figur B.3: Planen α og en normalvektor til planen.

Eksempel B.5 Planen α fra eksempel B.4 har ligningen

$$\alpha : \quad 4x + y - 2z + 2 = 0 \ .$$

Her undersøges om punktet $P(1, 2, 4)$ ligger i planen.

Hvis punktet P ligger i planen, så skal punktets koordinater passe ind i planens ligning. Koordinaterne indsættes derfor på ligningens venstre side, og man får

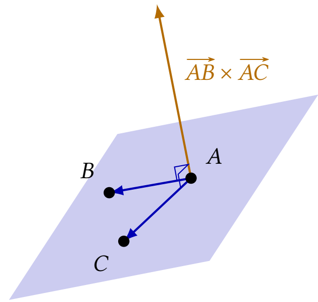
$$4 \cdot 1 + 2 - 2 \cdot 4 + 2 = 4 + 2 - 8 + 2 = 0 \ .$$

Da venstre side af ligningen er lig højre side når man indsætter punktets koordinater, så ligger punktet $P(1, 2, 4)$ i planen α.

Har man tre punkter der ikke ligger på en linje, så er der præcist én plan der indeholder alle tre punkter. Hvis de tre punkter kaldes A, B og C, så vil vektorerne $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{BC}$ være parallelle med planen. Dvs. man kan danne en normalvektor til planen ved at beregne f.eks.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \ ,$$

idet denne vektor står vinkelret på både $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$, som er parallelle med planen. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ står derfor vinkelret på planen.



Figur B.4: Planen gennem de tre punkter A, B og C har $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ som normalvektor.

Eksempel B.6 En plan går gennem punkterne

$$A(2,5,3)\ , \quad B(1,7,-4) \quad \text{og} \quad C(0,1,8)\ .$$

For at finde en ligning for planen, kan man starte med at beregne

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 7-5 \\ -4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-5 \\ 8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

En normalvektor til planen er derfor

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 19 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

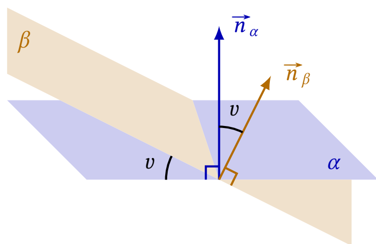
For at opstille en ligning for planen skal man også bruge et punkt i planen. Her kan ethvert af punkterne A, B eller C bruges. Bruger man punktet A, får man

$$\begin{aligned} -18(x-2) + 19(y-5) + 8(z-3) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \\ -18x + 19y + 8z - 83 = 0\ . & \end{aligned}$$

Man havde naturligvis fundet den samme ligning, hvis man havde brugt et af de andre to punkter.

B.1 Vinkel mellem planer

To planer der ikke er parallelle, vil skære hinanden. Det er muligt at finde vinklen mellem sådanne planer ved at finde vinklen mellem planernes normalvektorer (se figur B.5).



Figur B.5: Vinklen mellem to planer er lig vinklen mellem deres normalvektorer.

Eksempel B.7 Vinklen mellem de to planer α og β, der har ligningerne

$$\begin{aligned} \alpha :& \quad 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ \beta :& \quad 7x + 4y + 8 = 0\ , \end{aligned}$$

kan findes ved at finde vinklen mellem deres normalvektorer

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Vinklen v mellem disse to vektorer opfylder

$$\cos(v) = \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha|\,|\vec{n}_\beta|} = \frac{2\cdot 7 + (-1)\cdot 4 + 3\cdot 0}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\sqrt{7^2+4^2+0^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}\sqrt{65}} ,$$

og vinklen er derfor

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{14}\sqrt{65}}\right) = 70{,}6^\circ .$$

I virkeligheden er der to vinkler mellem planerne – en spids og en stump. De to vinkler er tilsammen 180°.

Eksempel B.8 I eksempel B.7 blev den spidse vinkel mellem planerne α og β bestemt til 70,6°. Den stumpe vinkel mellem de to planer er derfor

$$180^\circ - 70{,}6^\circ = 109{,}4^\circ .$$

B.2 Afstanden fra et punkt til en plan

Planer i rummet har mange fællestræk med linjer i planen. En ligning for en plan minder f.eks. om en ligning for en linje i planen. Det viser sig at afstanden fra et punkt i rummet til en given plan kan beregnes med en formel der ligner formlen for afstanden mellem et punkt og en linje i planen. Der gælder nemlig følgende:

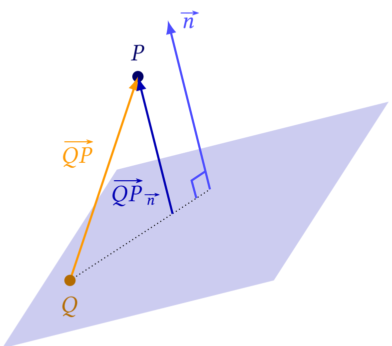
Sætning B.9

Afstanden fra punktet $P(x_0, y_0, z_0)$ til planen

$$\alpha : \quad ax + by + cz + d = 0$$

er givet ved formlen

$$\operatorname{dist}(P,\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} .$$



Figur B.6: Afstanden fra punktet P til planen α er lig længden af vektorprojektionen $\overrightarrow{QP}_{\vec{n}}$.

Bevis

Planen α har ligningen $ax + by + cz + d = 0$. En normalvektor for planen er derfor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} .$$

En skitse af situationen kan ses på figur B.6.

Hvis $Q(x_1, y_1, z_1)$ er et tilfældigt punkt i planen, så kan afstanden fra punktet P til planen α beregnes som længden af vektoren $\overrightarrow{QP}_{\vec{n}}$, dvs. $\overrightarrow{QP}$'s projektion på normalvektoren $\vec{n}$ (se figuren).

Da vektoren $\overrightarrow{QP}$ har koordinaterne

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{pmatrix} ,$$

kan længden af vektoren $\overrightarrow{QP}_{\vec{n}}$ beregnes vha. sætning A.13. Man får

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{QP}_{\vec{n}}\right| &= \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{QP}\right|}{|\vec{n}|}\\ &= \frac{\left|\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x_0-x_1\\y_0-y_1\\z_0-z_1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right|}\\ &= \frac{|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ &= \frac{|ax_0+by_0+cz_0-ax_1-by_1-cz_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ .\end{aligned} \tag{B.1}$$

Men fordi punktet $Q(x_1, y_1, z_1)$ ligger i planen α, passer punktets koordinater ind i planens ligning, dvs.

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad d = -ax_1 - by_1 - cz_1\ .$$

Dette indsættes i ligningen (B.1), og man får

$$\left|\overrightarrow{QP}_{\vec{n}}\right| = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ .$$

Da længden af denne vektor er lig afstanden fra P til α, er sætningen dermed vist. ∎

Eksempel B.10 Her beregnes afstanden fra punktet $P(4, -2, 3)$ til planen

$$\alpha:\quad 2x + 3y - 5z + 1 = 0\ .$$

Sætning B.9 anvendes, og man får

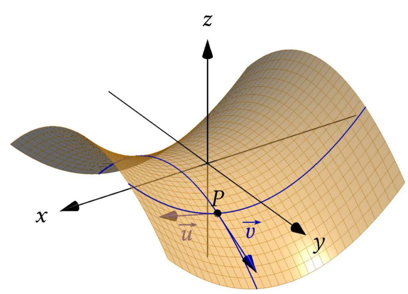
$$\mathrm{dist}(P,\alpha) = \frac{|2\cdot 4 + 3\cdot(-2) - 5\cdot 3 + 1|}{\sqrt{2^2+3^2+(-5)^2}} = \frac{|-12|}{\sqrt{38}} = \frac{12}{\sqrt{38}} \approx 1{,}95\ .$$

B.3 Tangentplaner

Hvis man skal bestemme ligningen til en tangentplan, skal man finde en metode til at bestemme en normalvektor til en flade der er graf for en funktion $f(x, y)$ af to variable.

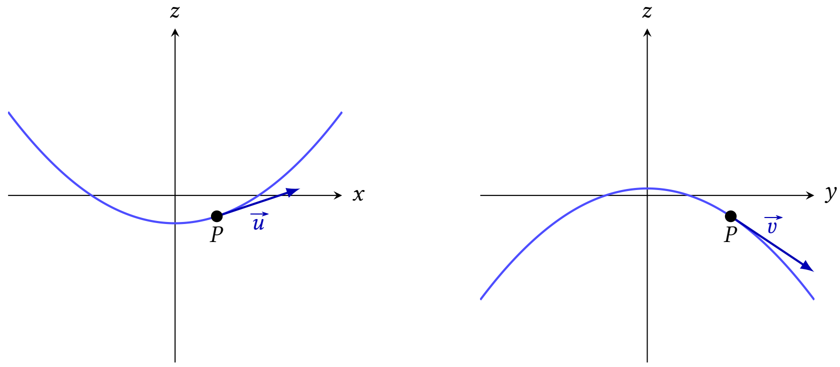
Figur B.7 viser en sådan flade. På figuren er der afsat et punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ på fladen (hvor $z_0 = f(x_0, y_0)$), og der er tegnet vektorer som er parallelle med snitkurverne i hhv. x- og y-aksens retning. De to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ tangerer således fladen, dvs. en normalvektor til fladen i punktet P kan beregnes som $\vec{u} \times \vec{v}$.

Da vektoren $\vec{u}$ er parallel med snitkurven i x-aksens retning, kan man finde koordinaterne til $\vec{u}$ ved at analysere snitkurven som er graf for



Figur B.7: Et punkt P på en flade og vektorer parallelle med fladen i x- og i y-aksens retning.

Figur B.8: Snitkurverne i hhv. x- og y-aksens retning gennem punktet P.



(a) Grafen for $g(x) = f(x, y_0)$.

(b) Grafen for $h(y) = f(x_0, y)$.

$g(x) = f(x, y_0)$, altså den funktion hvor y holdes fast på y_0, punktet P's y-koordinat. Figur B.8 viser graferne for de to funktioner

$$g(x) = f(x, y_0) \quad \text{og} \quad h(y) = f(x_0, y)\ .$$

$\vec{u}$ tangerer grafen for $g(x)$, dvs. den har koordinaterne[1]

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g'(x_0) \end{pmatrix} .$$

[1] y-koordinaten til vektoren er 0 da grafen er parallel med y-aksen. Bemærk også at den lodrette akse er z-aksen.

Men ud fra definitionen på g ser man at $g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$, dvs.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} .$$

Idet $h'(y) = f'_y(x_0, y)$ kan man argumentere på samme måde for at

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} .$$

Sætter man nu $p = f'_x(x_0, y_0)$ og $q = f'_y(x_0, y_0)$, er

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ -q \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

og dette er en normalvektor for tangentplanen til grafen for f i punktet P.

Ligningen for tangentplanen er derfor

$$-p(x - x_0) - q(y - y_0) + 1(z - z_0) = 0$$

som kan omskrives til

$$z = p(x - x_0) + q(y - y_0) + z_0\ .$$

Hermed er formlen i sætning 3.4 bevist.

Bibliografi

[1] *A Topographical Map of a hilly terrain (Stowe, Vermont, USA)*. 2006. URL: https://commons.wikimedia.org/ (hentet 07.02.2021).

[2] *Definition of nabla*. 2021. URL: https://www.lexico.com/definition/nabla (hentet 11.08.2021).