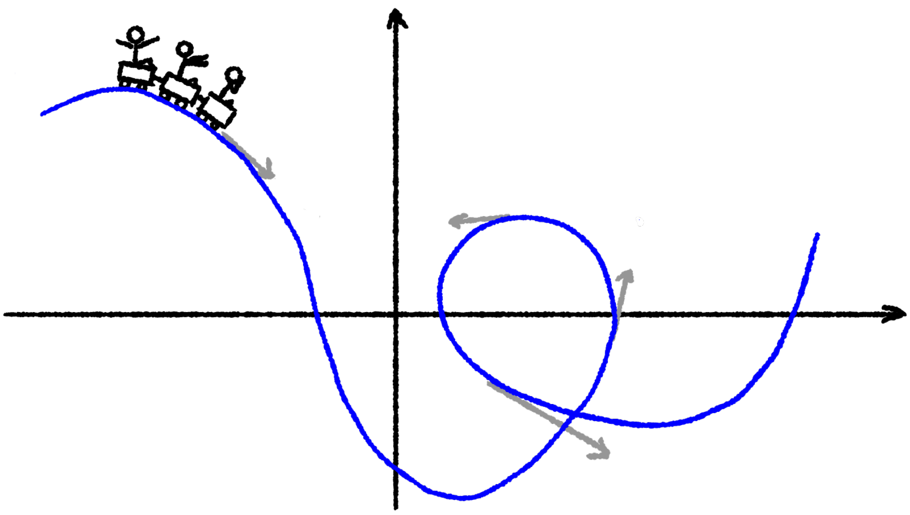
Vektorfunktioner

Version 1.0
8. august 2021



Mike Vandal Auerbach
www.mathematicus.dk

Vektorfunktioner
Version 1.0, 2021

Disse noter dækker kernestoffet i vektorfunktioner efter gymnasiereformen 2017.

Enkelte grafer/figurer er markeret med symbolet der fungerer som link til et interaktivt GeoGebra-arbejdsark. Se også www.geogebra.org.

Disse noter er skrevet til matematikundervisning på stx og må frit anvendes til ikke-kommercielle formål.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

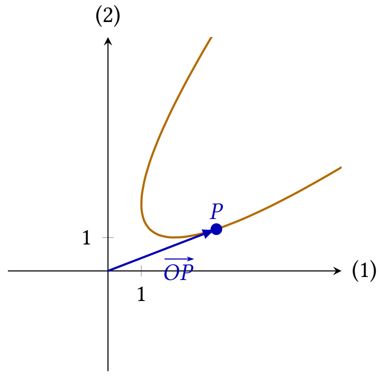
Indhold

1 Vektorfunktioner og grafer

En sædvanlig funktion $f(x)$ har en graf der består af punkterne $(x, f(x))$. Da der er en entydig bestemt funktionsværdi $f(x)$ til hvert x, kan der ikke være punkter på en funktions graf som har samme x-værdi men forskellige y-værdier. Eller sagt på en anden måde: en lodret linje kan kun skære grafen for en funktion ét sted.

Kurven på figur 1.1 kan således ikke være grafen for en funktion $f(x)$. Det viser sig dog at kurven kan beskrives som grafen for en såkaldt *vektorfunktion*, dvs. en funktion hvis funktionsværdier er vektorer.

Man kan forestille sig at kurven på figur 1.1 er fremkommet ved at et punkt P har bevæget sig i planen. Punktet P's koordinater bliver på denne måde funktioner af tiden, og kurven viser punktets vej gennem planen. Funktionsværdierne for vektorfunktionen er så stedvektorerne til punktet P. Definitionen herunder beskriver det mere formelt.



Figur 1.1: Grafen for en vektorfunktion.

Definition 1.1

Hvis der til ethvert tal t i et interval I svarer en vektor $\vec{s}(t)$, altså

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

kaldes $\vec{s}(t)$ en vektorfunktion.

Funktionerne $x(t)$ og $y(t)$ kaldes vektorfunktionens *koordinatfunktioner*, og t kaldes *parameteren*.

Grafen for funktionen $\vec{s}$ kaldes også *banekurven* eller *parameterkurven* for $\vec{s}$, og den består af de punkter P hvorom der gælder at der findes et $t \in I$ så $\overrightarrow{OP} = \vec{s}(t)$.

Funktionsværdierne for vektorfunktioner er altså vektorer. Vektoren $\vec{s}(t)$ kan opfattes som stedvektoren $\overrightarrow{OP}$ til et punkt P i planen. Grafen for vektorfunktionen er så den kurve der beskriver den bane punktet P har gennem koordinatsystemet efterhånden som t gennemløber intervallet I.

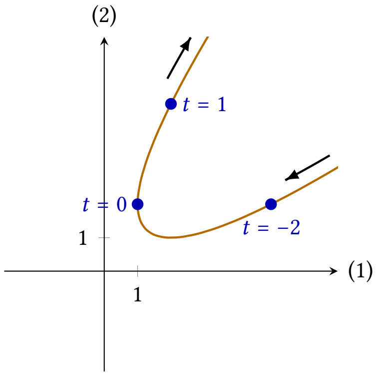
Eksempel 1.2 Kurven på figur 1.1 er grafen for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ t^2 + 2t + 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Denne vektorfunktion er altså defineret for alle reelle tal.

Vha. forskriften kan man beregne nogle punkter på grafen:

$$\vec{s}(-2) = \begin{pmatrix} (-2)^2 + 1 \\ (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\vec{s}(0) = \begin{pmatrix} 0^2 + 1 \\ 0^2 + 2 \cdot 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\vec{s}(1) = \begin{pmatrix} 1^2 + 1 \\ 1^2 + 2 \cdot 1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} .$$



Figur 1.2: Punkter på grafen for forskellige værdier af t.

Disse fire stedvektorer viser at punkterne $(5, 2)$, $(1, 2)$ og $(2, 5)$ ligger på grafen for vektorfunktionen $\vec{s}$. Afbilder man punkterne på grafen (se figur 1.2), ser man at man ud fra de voksende værdier af t også kan se kurvens gennemløbsretning (angivet med pile på figuren). Kurven gennemløbes altså i pilenes retning for voksende værdier af tiden t.

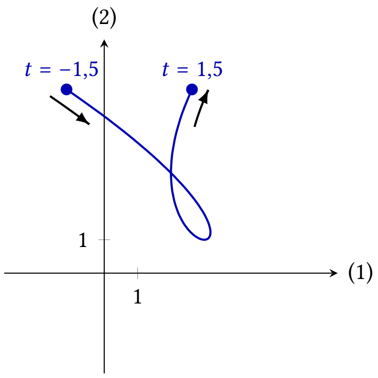
Eksempel 1.3 Et andet eksempel er vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t^2 - t + 3 \\ 2t^2 + 1 \end{pmatrix} , \quad -1{,}5 \le t \le 1{,}5 .$$

Grafen for denne vektorfunktion kan ses på figur 1.3.

Ved at beregne koordinaterne for kurvens start- og slutpunkt, kan kurvens gennemløbsretning bestemmes:

$$\vec{s}(-1{,}5) = \begin{pmatrix} (-1{,}5)^3 - (-1{,}5)^2 + 3 \\ 2 \cdot (-1{,}5)^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}13 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$$
$$\vec{s}(1{,}5) = \begin{pmatrix} 1{,}5^3 - 1{,}5^2 + 3 \\ 2 \cdot 1{,}5^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}63 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} .$$



Figur 1.3: To punkter på grafen for vektorfunktionen $\vec{s}$.

De to punkter ses markeret på figuren med deres parameterværdier, og kurvens gennemløbsretning er angivet med pile.

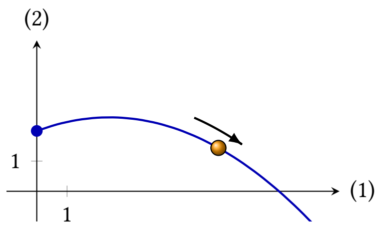
1.1 Tid og sted

Vektorfunktioners grafer kan bl.a. fortolkes som banekurven for et objekt der bevæger sig i planen. Parameteren t vil da beskrive den tid der går, og funktionsværdierne $\vec{s}(t)$ beskriver objektets position til tiden t.

Eksempel 1.4 En person kaster en bold. Boldens position kan beskrives ved vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 8t \\ -5t^2 + 3t + 2 \end{pmatrix} , \quad t \ge 0 ,$$

hvor koordinatfunktionen $x(t) = 8t$ beskriver boldens afstand fra udgangspunktet i vandret retning (i meter), og $y(t) = -5t^2 + 3t + 2$ beskriver boldens højde over jorden (i meter). Parameteren t angiver så tiden i sekunder, således at $t = 0$ svarer til det tidspunkt hvor bolden kastes, og f.eks. $t = 1$ svarer til 1 sekund efter bolden er blevet kastet.



Figur 1.4: Banekurven for en bold der kastes.

Funktionens graf kan ses på figur 1.4.

1.2 Skæringspunkter med akserne

På førsteaksen er andenkoordinaten altid 0, dvs. et punkt på førsteaksen vil altid hedder $(x, 0)$. På andenaksen vil punkter tilsvarende have koordinaterne $(0, y)$. Man kan derfor finde en kurves skæringspunkter med akserne ved at sætte hhv. $x(t)$ eller $y(t)$ lig med 0.

Metoden illustreres her med eksempler.

Eksempel 1.5 Grafen på figur 1.3 er graf for

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t^2 - t + 3 \\ 2t^2 + 1 \end{pmatrix} , \quad -1{,}5 \leq t \leq 1{,}5 \;.$$

Som man kan se på figuren, skærer grafen andenaksen. For at finde dette skæringspunkt sætter man koordinatfunktionen

$$x(t) = t^3 - t^2 - t + 3$$

lig med 0 (idet alle punkter på andenaksen har førstekoordinat 0).

Man skal altså løse ligningen

$$t^3 - t^2 - t + 3 = 0 \;.$$

Ved hjælp af et CAS-værktøj kan denne ligning løses, og man finder løsningen

$$t = -1{,}359 \;.$$

Dette er parameterværdien der svarer til kurvens skæringspunkt med andenaksen. Punktets førstekoordinat er 0 (da det ligger på andenaksen), dets andenkoordinat finder man ved at indsætte parameterværdien i koordinatfunktionen $y(t)$:

$$y(-1{,}359) = 2(-1{,}359)^2 + 1 = 4{,}695 \;.$$

Dette resultat viser at kurvens skæringspunkt med andenaksen er $(0, 4.695)$.

Eksempel 1.6 Grafen på figur 1.4 skærer både første- og andenaksen. Vektorfunktionen har forskriften

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 8t \\ -5t^2 + 3t + 2 \end{pmatrix} , \quad t \geq 0 \;.$$

De to koordinatfunktioner er altså

$$\begin{aligned} x(t) &= 8t \\ y(t) &= -5t^2 + 3t + 2 \;. \end{aligned}$$

For at bestemme skæringen med andenaksen sætter man $x(t)$ lig med 0:

$$8t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 0 \;.$$

Grafen skærer altså andenaksen ved parameterværdien $t = 0$ hvor

$$y(0) = -5 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 2 \;,$$

dvs. i punktet $(0, 2)$. Dette viser at bolden kastes fra en højde på 2 meter.

Skæringen med førsteaksen findes ved at sætte $y(t) = 0$:

$$-5 \cdot t^2 + 3t + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = -0{,}4 \ \vee \ t = 1 \ .$$

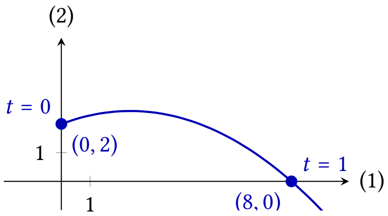
Den første løsning ligger uden for det interval hvori parameteren er defineret, og denne løsning kasseres derfor.[1] Den anden løsning svarer derimod til punktet med x-værdi

[1] I forhold til beskrivelsen af boldens bane ville denne løsning svare til at gå tilbage i tiden.

$$x(1) = 8 \cdot 1 = 8 \ ,$$

altså punktet $(8, 0)$.

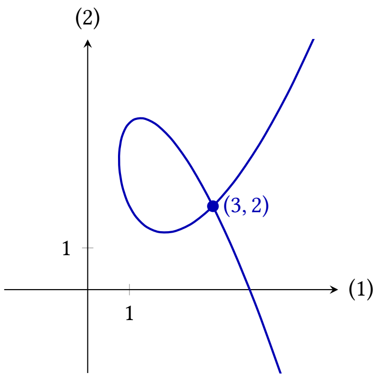
De to skæringer viser altså at til tiden $t = 0$ (0 sekunder) kastes bolden fra en højde på 2 meter og efter 1 sekund ($t = 1$) rammer den jorden 8 meter fra udgangspunktet. Grafen med de to punkter kan ses på figur 1.5.



Figur 1.5: Skæringer med akserne for banekurven for den kastede bold.

1.3 Multiple punkter

Når man gennemløber grafen på figur 1.6, kommer man to gangen igennem punktet $(3, 2)$. Et punkt som grafen løber igennem flere gange, kaldes et *multipelt punkt*. I dette tilfælde løber grafen igennem punktet to gange, og det kaldes derfor også et *dobbeltpunkt*.



Figur 1.6: En graf med et dobbeltpunkt.

Definition 1.7

Lad der være givet en vektorfunktion $\vec{s}(t)$ defineret på et interval I. Hvis der findes $t_1, t_2 \in I$, således at

$$\vec{s}(t_1) = \vec{s}(t_2) \ ,$$

kaldes punktet der svarer til denne værdi af $\vec{s}$, for et *multipelt punkt*.

Hvis man kender den ene parameterværdi for et multipelt punkt, kan man bestemme den anden/de andre.

Eksempel 1.8 Parameterkurven på figur 1.6 er grafen for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t + 1 \\ t^3 + t^2 - 2t + 2 \end{pmatrix} \ .$$

Denne graf har et dobbeltpunkt i $(3, 2)$. For at finde parameterværdierne til dette dobbeltpunkt kan man løse ligningen $x(t) = 3$ eller ligningen $y(t) = 2$:

$$t^2 + t + 1 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -2 \ \vee \ x = 1 \ .$$

Man kan nu checke om andenkoordinaten er 2 for begge disse parameterværdier:

$$\begin{aligned} y(-2) &= (-2)^3 + (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 2 = 2 \\ y(1) &= 1^3 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 2 \ . \end{aligned}$$

Grafen går altså gennem punktet $(3, 2)$ både når $t = -2$ og når $t = 1$.

Hvis man i stedet for at kende det multiple punkt kender én af parameterværdierne, kan man regne de andre parameterværdier ud. Det næste eksempel viser hvordan.

Eksempel 1.9 Parameterkurven for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 3t - t^3 \\ t^2 + t - 1 \end{pmatrix}$$

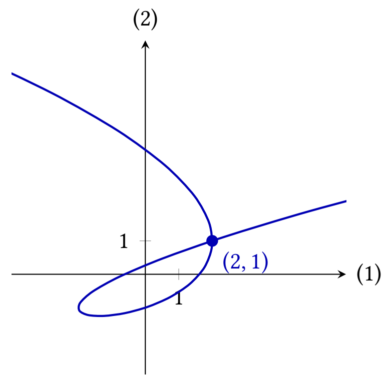
har et dobbeltpunkt hvor $t = 1$ (se figur). Man kan nu bestemme dobbeltpunktets koordinater ved at beregne

$$\vec{s}(1) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 1^3 \\ 1^2 + 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Man kan nu beregne den anden parameterværdi som i foregående eksempel ved at løse $x(t) = 2$ eller $y(t) = 1$:

$$t^2 + t - 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = -2 \lor t = 1 .$$

Løsningerne giver den allerede kendte parameterværdi $t = 1$ samt den anden parameterværdi $t = -2$ i dobbeltpunktet $(2, 1)$ (se figur 1.7).



Figur 1.7: Grafen for $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 3t - t^3 \\ t^2 + t - 1 \end{pmatrix}$ har et dobbeltpunkt med parameterværdierne $t = -2$ og $t = 1$.

Ukendte punkter

Hvis man hverken kender parameterværdien eller koordinaterne til dobbeltpunktet, kan man stadig bestemme punktet, det er dog en anelse mere besværligt. Her vises et eksempel.

Eksempel 1.10 Her ses igen på vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 3t - t^3 \\ t^2 + t - 1 \end{pmatrix}$$

fra eksempel 1.9. Dobbeltpunkter for grafen findes steder hvor to forskellige parameterværdier t og u har samme stedvektor, dvs. $\vec{s}(t) = \vec{s}(u)$. Dvs. der skal både gælde $x(t) = x(u)$, $y(t) = y(u)$ og $t \neq u$, så man skal løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3t - t^3 &= 3u - u^3 \\ t^2 + t - 1 &= u^2 + u - 1 \end{aligned}$$

og kun acceptere de løsninger hvor $t \neq u$.

Ligningssystemet kan løses i et CAS-værktøj, hvorved man finder løsningerne

$$(t = 1 \land u = 1) \lor (t = -2 \land u = 1) \lor (t = 1 \land u = -2) \lor (t = -2 \land u = -2) .$$

Da de to parameterværdier skal være forskellige og rækkefølgen er ligegyldig, er der dog reelt kun én løsning, nemlig at den ene parameter er -2 og den anden er 1. Grafen har altså et dobbeltpunkt, og parameterværdierne i dobbeltpunktet er hhv. -2 og 1.

1.4 Øvelser

Øvelse 1.1
En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 - t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R};.$$

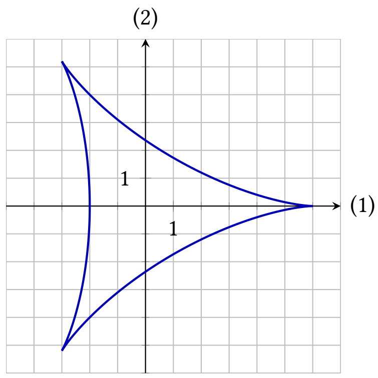
a) Tegn grafen for $\vec{s}$.

b) Bestem $\vec{s}(-1)$ og $\vec{s}(2)$.

c) Hvad er kurvens gennemløbsretning?

Øvelse 1.2
Herunder ses grafen for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 4\sin(t) - 2\sin(2t) \\ 4\cos(t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t < 2\pi \,.$$



a) Bestem $\vec{s}(0)$, $\vec{s}(\frac{\pi}{3})$ og $\vec{s}(\frac{2\pi}{3})$.

b) Hvad er kurvens gennemløbsretning?

Øvelse 1.3
En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t + 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \,.$$

Grafen for $\vec{s}$ går gennem punktet $(6, 4)$.

a) Bestem parameterværdien til dette punkt.

Øvelse 1.4
En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 3t \\ t^3 + 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \,.$$

a) Bestem grafens skæringspunkter med første- og andenaksen.

Øvelse 1.5
En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t^4 - 4t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \,.$$

a) Tegn grafen for $\vec{s}$.

b) Bestem grafens skæringspunkter med første- og andenaksen.

Det ene skæringspunkt med andenaksen er et dobbeltpunkt.

c) Bestem parameterværdien til dette punkt.

Øvelse 1.6
Grafen for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t < 2\pi$$

har et dobbeltpunkt for $t = \frac{\pi}{6}$.

a) Bestem koordinaterne til dobbeltpunktet.

b) Bestem den anden parameterværdi til dette punkt.

Kurven har også et dobbeltpunkt i $(-1, 0)$.

c) Bestem parameterværdierne til dette punkt.

Øvelse 1.7
Grafen for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ t^3 - t + 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

har et dobbeltpunkt.

a) Bestem parameterværdien til dobbeltpunktet.

b) Bestem punktets koordinater.

Øvelse 1.8
Tegn grafen, og bestem koordinaterne til dobbeltpunkterne for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 6t \\ -t^4 + 5t \end{pmatrix}, -5 \le t \le 5 \,.$$

Tangenter 2

For at bestemme tangenter til kurven skal man kunne differentiere vektorfunktionen. Differentialkvotienten for en vektorfunktion kan man bestemme ved at se på grænseværdien

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{\vec{s}(t) - \vec{s}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \longrightarrow t_0} \begin{pmatrix} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} \\ \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \end{pmatrix} .$$

Idet man regner på de enkelte koordinater hver for sig, giver den følgende definition mening.

Definition 2.1

En vektorfunktion $\vec{s}(t)$ siges at være differentiabel i t_0 hvis de to koordinatfunktioner $x(t)$ og $y(t)$ er differentiable i t_0.

Differentialkvotienten af $\vec{s}(t)$ er vektoren

$$\vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} .$$

Hvis et punkt P på banekurven for $\vec{s}$ er givet ved parameterværdien $t = t_0$, viser det sig at vektoren $\vec{s}\,'(t_0)$ er retningsvektor for tangenten til banekurven i punktet P.

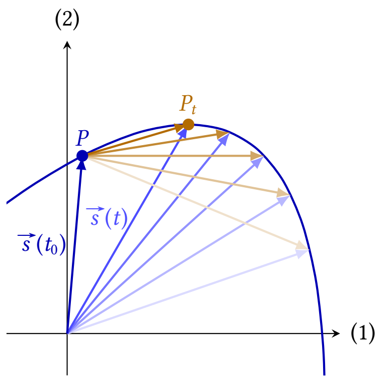
Et argument for dette kan man få ved at se på figur 2.1. Her er punktet P_t givet ved $\vec{s}(t)$, mens P er givet ved $\vec{s}(t_0)$. På figuren kan man se at

$$\overrightarrow{PP_t} = \vec{s}(t) - \vec{s}(t_0) ,$$

og at vektoren $\overrightarrow{PP_t}$ kommer tættere på at være parallel med en tangent til kurven når t kommer tættere på t_0. Når $t \longrightarrow t_0$ vil $\vec{s}(t) - \vec{s}(t_0)$ nærme sig nulvektoren, men vektoren

$$\frac{1}{t - t_0} \left(\vec{s}(t) - \vec{s}(t_0) \right)$$

er ensrettet med $\vec{s}(t) - \vec{s}(t_0)$, og denne vektor går mod $\vec{s}\,'(t_0)$ for $t \longrightarrow t_0$. Derfor må den følgende sætning gælde.



Figur 2.1: Jo tættere t kommer på t_0, jo tættere er $\overrightarrow{PP_t}$ på at være parallel med en tangent til kurven i P.

Sætning 2.2

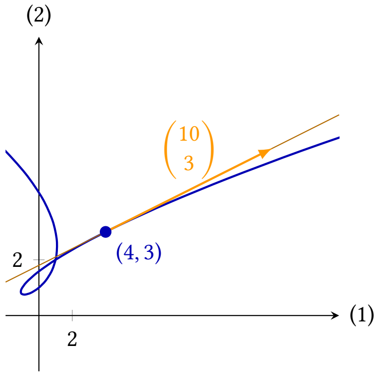
Hvis en vektorfunktion er differentiabel i t_0, og $\vec{s}\,'(t_0)$ ikke er nulvektoren, så er vektoren $\vec{s}\,'(t_0)$ parallel med tangenten til kurven i punktet givet ved parameterværdien t_0.

Idet vektoren $\vec{s}\,'(t_0)$ er parallel med en tangent til kurven, må den være retningsvektor for tangenten. Derfor har man også den følgende sætning.

Sætning 2.3

Lad der være givet en differentiabel vektorfunktion $\vec{s}(t)$ og en parameterværdi t_0. Hvis $\vec{s}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, har tangenten i punktet givet ved $\vec{s}(t_0)$ parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{s}(t_0) + t \cdot \vec{s}\,'(t_0) \, .$$



Figur 2.2: Grafen for $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 2t \\ t^2 - t + 1 \end{pmatrix}$ og tangenten i punktet $(4, 3)$.

Eksempel 2.4 I dette eksempel bestemmes en parameterfremstilling for tangenten til banekurven for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 2t \\ t^2 - t + 1 \end{pmatrix}$$

i punktet givet ved parameterværdien $t = 2$.

Først beregnes

$$\vec{s}(2) = \begin{pmatrix} 2^3 - 2 \cdot 2 \\ 2^2 - 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \, .$$

Derefter bestemmer man

$$\vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 2 \\ 2t - 1 \end{pmatrix}$$

og beregner

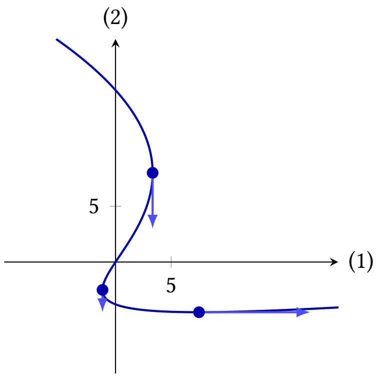
$$\vec{s}\,'(2) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^2 - 2 \\ 2 \cdot 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \, .$$

Dvs. linjen der tangerer banekurven i punktet $(4, 3)$ har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \, .$$

Banekurven og tangenten kan ses på figur 2.2.

Når man undersøger en banekurve er det ofte interessant at finde de steder hvor kurven har tangenter der er parallelle med første- eller andenaksen. Det svarer til at bestemme de steder hvor vektoren $\vec{s}\,'(t)$ er parallel med første- eller andenaksen.



Figur 2.3: Grafen for $\vec{s}$ har to lodrette og én vandret tangent.

Eksempel 2.5 Figur 2.3 viser grafen for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t \\ \frac{t^2}{2} - 3t \end{pmatrix} \, .$$

For at bestemme røringspunkterne for de vandrette og lodrette tangenter, bestemmer man først

$$\vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t - 2 \\ t - 3 \end{pmatrix} \, .$$

Man bestemmer så de steder hvor der er vandrette tangenter, ved at løse ligningen $y'(t) = 0$:

$$t - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 3 \ .$$

Grafen har altså en vandret tangent i punktet givet ved $t = 3$:

$$\vec{s}(3) = \begin{pmatrix} \frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} - 2 \cdot 3 \\ \frac{3^2}{2} - 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \ .$$

De steder hvor der er lodrette tangenter, kan man finde ved at løse $x'(t) = 0$:

$$t^2 + t - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad t = -2 \ \vee \ t = 1 \ .$$

Røringspunkterne er så givet ved

$$\vec{s}'(-2) = \begin{pmatrix} \frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} - 2 \cdot (-2) \\ \frac{(-2)^2}{2} - 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}'(1) = \begin{pmatrix} \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1 \\ \frac{1^2}{2} - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \ .$$

Dvs. grafen har en vandret tangent i punktet $(\frac{15}{2}, -\frac{9}{2})$ og lodrette tangenter i punkterne $(\frac{10}{3}, 8)$ og $(-\frac{7}{6}, -\frac{5}{2})$.

2.1 Hastighed og acceleration

Som nævnt ovenfor kan grafen for en vektorfunktion fortolkes som banekurven for et objekt der bevæger sig i planen. I denne fortolkning spiller differentialkvotienten $\vec{s}'(t)$ også en rolle.

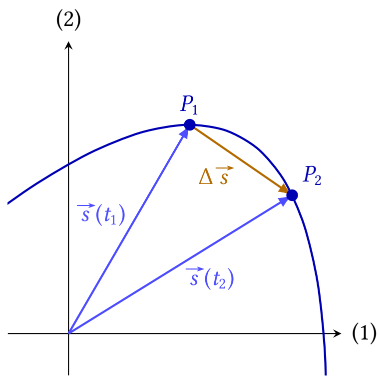
Definition 2.6

Lad en differentiabel vektorfunktion $\vec{s}$ og en parameterværdi t_0 være givet. Så kalder man

- $\vec{s}'(t_0)$ *hastigheden* til tiden t_0,
- $|\vec{s}'(t_0)|$ *farten* til tiden t_0, og
- $\vec{s}''(t_0)$ *accelerationen* til tiden t_0.

Figur 2.4 viser en banekurve for en vektorfunktion $\vec{s}$. Punkterne P_1 og P_2 på kurven svarer til parameterværdierne t_1 og t_2. Hvis banekurven beskriver bevægelsen af et objekt, svarer parameteren t til tiden. I den tid der går fra $t = t_1$ til $t = t_2$, flytter punktet P sig fra P_1 til P_2, dvs. punktet flytter sig med vektoren

$$\Delta\vec{s} = \vec{s}(t_2) - \vec{s}(t_1) \ .$$



Figur 2.4: Fra tiden t_1 til tiden t_2 flytter punktet P sig med vektoren $\Delta\vec{s}$.

Den gennemsnitlige hastighed må her være

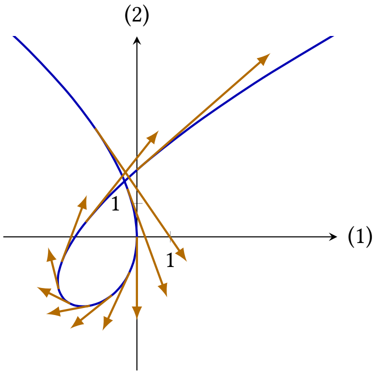
$$\vec{v}_{\text{gennemsnit}} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{s}(t_2) - \vec{s}(t_1)}{t_2 - t_1} \ .$$

Hvis man her lader $t_2 \longrightarrow t_1$, finder man netop at den øjeblikkelige hastighed i punktet P_1 er givet ved

$$\vec{v}(t_1) = \lim_{t_2 \longrightarrow t_1} \frac{\vec{s}(t_2) - \vec{s}(t_1)}{t_2 - t_1} = \vec{s}\,'(t_1)\ .$$

I lyset af dette giver definitionen ovenfor altså god mening.

Bemærk at *fart* og *hastighed* ikke er det samme. Hastigheden er en vektor, som beskriver både bevægelsens retning og hvor hurtigt bevægelsen sker. Farten er et tal (længden af hastighedsvektoren) som kun beskriver hvor hurtigt det går.



Figur 2.5: Hastighedsvektoren i forskellige punkter på grafen for en vektorfunktion.

De næste par eksempler analyserer sammenhængen hastighed og acceleration, og banekurvens udseende.

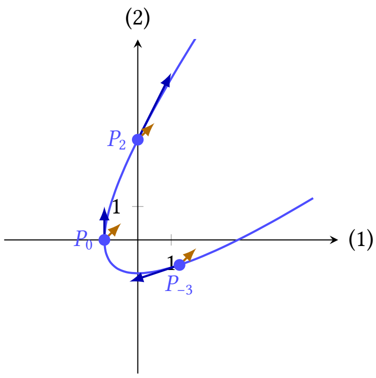
Eksempel 2.7 Figur 2.5 viser grafen for funktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t^3 - t^2 \\ \frac{3}{4}t^2 - \frac{5}{2}t \end{pmatrix}\ .$$

Hastighedsvektoren i en række punkter er afbildet på grafen.

Som man kan se på figuren bliver pilene mindre når kurven bevæger sig rundt i »sløjfen« på grafen. Dvs. at farten åbenbart bliver mindre når kurven bevæger sig rundt i en tæt sløjfe. Efter sløjfen vokser farten igen.

Man kan også ud fra hastighedsvektoren afgøre kurvens omløbsretning, idet hastighedsvektorerne viser i hvilken retning kurven bevæger sig, når tiden t vokser.



Figur 2.6: Hastighedsvektorer og accelerationsvektorer i forskellige punkter på grafen for en vektorfunktion.

Eksempel 2.8 Figur 2.6 viser grafen for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t^2 - 1 \\ \frac{1}{4}t^2 + t \end{pmatrix}$$

samt hastighedsvektorerne og accelerationsvektorerne i de tre punkter P_{-3}, P_0 og P_2 på grafen. Hastighedsvektorerne er parallelle med kurvens tangenter, og deres længder viser hvor hurtigt bevægelsen foregår.

Accelerationsvektorerne viser hvordan hastighedsvektorerne ændrer sig over tid. I punktet P_{-3} peger accelerationsvektoren imod banekurvens bevægelsesretning. Dette viser at bevægelsen bliver bremset der hvor kurven svinger rundt. I P_0 viser accelerationsvektoren at bevægelsen bliver hurtigere og drejer med uret, og i punktet P_2 kan man se at vinklen mellem hastighedsvektoren og accelerationsvektoren er lille, dvs. her bliver bevægelsen hurtigere, og kurven drejer en anelse med uret.

2.2 Øvelser

Øvelse 2.1
En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(\frac{\pi}{4}t) \\ t+3 \end{pmatrix}, \quad -4 \le t \le 4 .$$

a) Bestem en parameterfremstilling for tangenten til kurven i punktet givet ved parameteren $t = 2$.

Øvelse 2.2
Vektorfunktionen $\vec{s}$, givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 - 1 \\ t^2 + t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} ,$$

har en graf der går gennem punktet $P(8, 12)$

a) Bestem parameterværdien der svarer til dette punkt.

b) Bestem en parameterfremstilling for tangenten til kurven i punktet.

Øvelse 2.3
En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 4t + 1 \\ t^3 - t^2 - 5t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

a) Bestem røringspunkterne for grafens vandrette tangenter.

b) Bestem røringspunkterne for grafens lodrette tangenter.

c) Bestem parameterfremstillinger for grafens vandrette og lodrette tangenter.

Øvelse 2.4
En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 3t \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

a) Bestem hastigheden til tiden $t = 2$.

b) Bestem farten til tiden $t = 2$.

c) Hvad er kurvens omløbsretning?

Øvelse 2.5
Vektorfunktionen $\vec{s}$, givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t^2 + 1 \\ 2t^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} ,$$

har en graf der går gennem punktet $P(19, 19)$

a) Bestem parameterværdien der svarer til dette punkt.

b) Bestem hastigheden og accelerationen i punktet.

Øvelse 2.6
En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ 3\sin(t) - \sin(3t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi .$$

Bestem hastigheden og accelerationen for

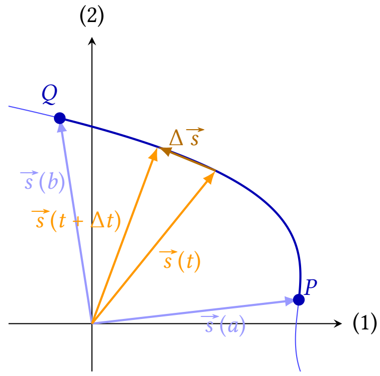
a) $t = 0$ b) $t = \frac{\pi}{2}$ c) $t = \frac{3\pi}{4}$,

og tegn grafen samt hastigheds- og accelerationsvektorerne i de 3 punkter.

3 Kurvelængder og arealer

I dette afsnit argumenteres der for formler for længden af en banekurve for en vektorfunktion og størrelsen af det areal, stedvektoren overstryger (mellem to parameterværdier a og b).

Figur 3.1 viser grafen for en vektorfunktion samt to punkter P og Q på grafen. De to punkter svarer til parameterværdierne a og b. Hvis man er interesseret i længden af banekurven mellem de to punkter P og Q, kan man begynde med at se på længden af et lille stykke af kurven.



Figur 3.1: Længden af banekurven fra P til Q.

Et tilpas lille stykke af banekurven er næsten en ret linje. Længden af et lille stykke kan derfor måles som længden af vektoren $\Delta\vec{s}$, hvor

$$\Delta s = \vec{s}(t+\Delta t) - \vec{s}(t) = \frac{\vec{s}(t+\Delta t) - \vec{s}(t)}{\Delta t}\Delta t\ .$$

Den første faktor i dette produkt går mod $\vec{s}\,'(t)$ for $\Delta t \longrightarrow 0$. Derfor er $\Delta\vec{s} \approx \vec{s}\,'(t)\Delta t$, og længden af $\Delta\vec{s}$ er

$$|\Delta\vec{s}| \approx \left|\vec{s}\,'(t)\right| \Delta t\ .$$

Er man interesseret i længden af hele kurven, skal man summere længden af alle disse små stykker fra P til Q, og man får den følgende sætning.

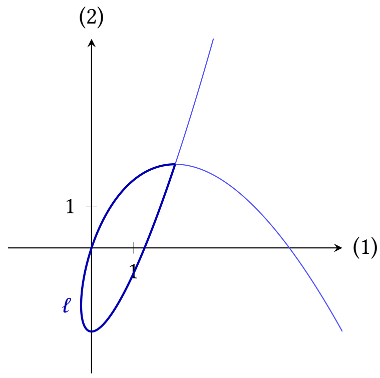
Sætning 3.1

For en differentiabel vektorfunktion $\vec{s}$ er længden af banekurven mellem punkterne P og Q, svarende til de to parameterværdier a og b, givet ved

$$\ell = \int_a^b \left|\vec{s}\,'(t)\right| \mathrm{d}t\ .$$

Eksempel 3.2 På figur 3.2 ses grafen for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}\ .$$



Figur 3.2: Grafen for $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}$.

Grafen har et dobbeltpunkt i $(2, 2)$, svarende til de to parameterværdier

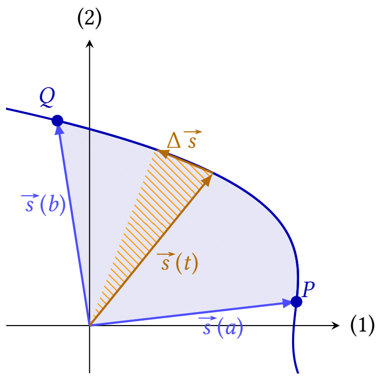
$$a = -1 \quad \text{og} \quad b = 2$$

som kan findes ved at løse ligningssystemet $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Længden af »sløjfen« på grafen kan derfor bestemmes som

$$\int_{-1}^{2} \left|\vec{s}\,'(t)\right| \,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{2} \sqrt{(t^2-t)^2 + (t^3-3t)^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

Dette integral beregnes nemmest på et CAS-værktøj hvor man finder at den markerede kurvelængde er 9,708.



Figur 3.3: Det overstrøgne areal fra P til Q.

Figur 3.3 viser grafen for en vektorfunktion samt det areal der overstryges af stedvektoren $\vec{s}$ mellem punkterne P og Q på banekurven. På figuren er der også skraveret et lille areal der overstryges i den meget lille tid Δt.

Størrelsen af det skraverede areal er halvdelen af det parallelogram der udspændes af $\vec{s}(t)$ og $\Delta\vec{s}$. Dette areal (med fortegn) kan beregnes som

$$\tfrac{1}{2}\det(\vec{s}(t), \Delta\vec{s}) = \tfrac{1}{2}\widehat{\vec{s}}(t)\cdot\Delta\vec{s}\ .$$

Fortegnet for dette areal afhænger af vinklen fra $\vec{s}(t)$ til $\Delta\vec{s}$. Denne vinkel er positiv hvis $\Delta\vec{s}$ peger i positv omløbsretning (mod uret). Ovenfor blev der argumenteret for at $\Delta\vec{s} \approx \vec{s}\,'(t)\Delta t$, dvs. størrelsen af det skraverede areal er omtrent

$$\tfrac{1}{2}\widehat{\vec{s}}(t)\cdot\vec{s}\,'(t)\Delta t\ ,$$

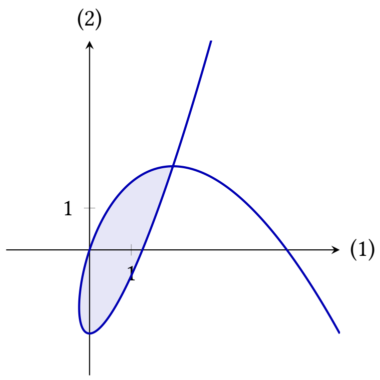
hvor fortegnet er positivt hvis $\vec{s}\,'(t)$ peger i positiv omløbsretning.

Hvis man skal beregne det samlede overstrøgne areal fra P til Q, skal disse små arealer lægges sammen, og man kommer frem til den følgende sætning.

Sætning 3.3

Lad der være givet en differentiabel vektorfunktion $\vec{s}$. Hvis banekurven fra P til Q (givet ved parameterværdierne a og b) gennemløbes i positiv omløbsretning, er arealet af det område der overstryges af stedvektoren givet ved formlen

$$A = \tfrac{1}{2}\int_a^b \widehat{\vec{s}}(t)\cdot\vec{s}\,'(t)\,\mathrm{d}t\ .$$



Figur 3.4: Grafen for $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2-t \\ t^3-3t \end{pmatrix}$.

Eksempel 3.4 Figur 3.4 viser grafen for den samme vektorfunktion som i eksempel 3.2. Vektorfunktionen er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2-t \\ t^3-3t \end{pmatrix}\ ,$$

dvs.

$$\widehat{\vec{s}}(t) = \begin{pmatrix} -t^3+3t \\ t^2-t \end{pmatrix}\ ,$$

og

$$\vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ 3t^2-3 \end{pmatrix}\ .$$

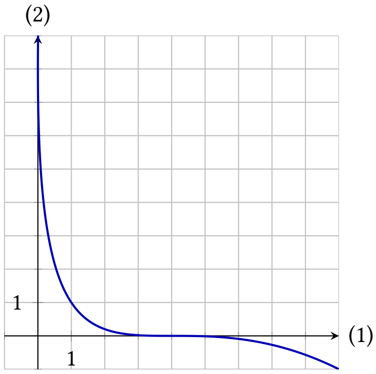
Da paramterværdierne til dobbeltpunktet er $a = -1$ og $b = 2$, kan arealet af det område der indesluttes af »sløjfen« på grafen, beregnes som

$$\int_{-1}^{2} \widehat{\vec{s}}(t)\cdot\vec{s}\,'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{2} \big((-t^3+3t)(2t-1)+(t^2-t)(3t^2-3)\big)\,\mathrm{d}t = \frac{81}{20} \approx 4{,}05\ .$$

3.1 Øvelser

Øvelse 3.1
Figuren herunder viser grafen for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ (1+t)^3 \end{pmatrix} \;, \quad t \in \mathbb{R} \;.$$



Grafen går gennem punkterne $(4, 0)$ og $(0, 8)$.

a) Bestem de to parameterværdier der hører til punkterne.

b) Bestem længden af kurven mellem de to punkter.

Øvelse 3.2
Tegn grafen for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t\cos(3t) \\ t\sin(3t) \end{pmatrix} \;, \quad 0 \leq t \leq 3 \;,$$

og bestem længden af kurven.

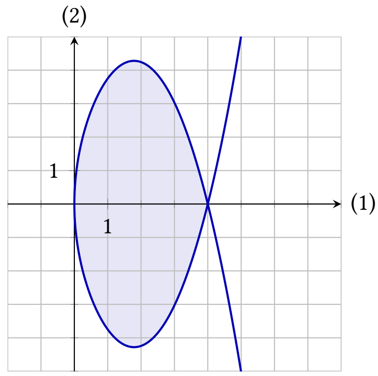
Øvelse 3.3
Tegn grafen for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \;, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \;,$$

og bestem arealet af området indesluttet af grafen.

Øvelse 3.4
Figuren herunder viser grafen for vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 4t - \frac{1}{4}t^5 \end{pmatrix} \;, \quad t \in \mathbb{R} \;.$$



Grafen har et dobbeltpunkt i $(4, 0)$.

a) Bestem de to parameterværdier der hører til dobbeltpunktet.

b) Bestem grafens omløbsretning.

c) Bestem arealet af det markerede område på figuren.

Øvelse 3.5
Vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix} \;, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

er en parametrisering af en cirkel med radius r og centrum i $(0, 0)$.

a) Benyt $\vec{s}$ til at udlede en formel for arealet af en cirkel med radius r.