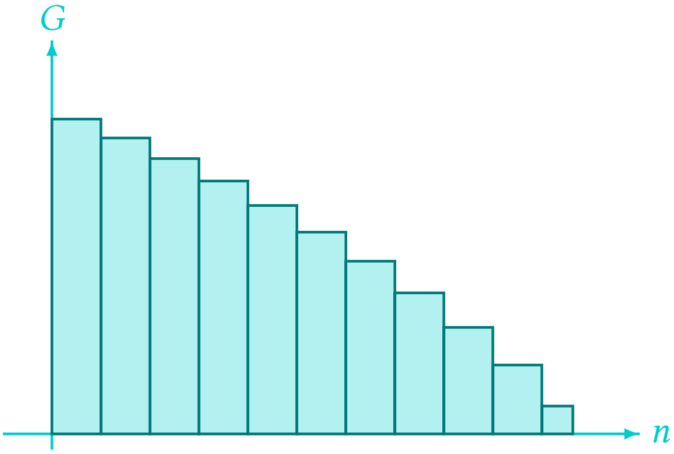
Renter og annuiteter

Version 1.1
5. april 2019



Mike Vandal Auerbach
www.mathematicus.dk

Renter og annuiteter
Version 1.1, 2019

Disse noter er skrevet til undervisning i matematik på stx A- og B-niveau og dækker det supplerende stof om rentesregning, indekstal, opsparing og lån.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

Indhold

1 Rentesregning

1.1 Indledende procentregning

Procent kommer af det latinske *pro centum*, der betyder »pr. hundrede«. F.eks. betyder 3% »3 pr. hundrede«, dvs. 3 hundrededele, eller sagt på en anden måde

$$3\% = \frac{3}{100} = 0{,}03\ .$$

I udregninger kan man altså altid erstatte tegnet % med en division med hundrede.[1]

[1]Dette er som regel smart at gøre, idet man så slipper for evt. forvirring omkring, hvad % betyder i den givne situation.

Vil man regne et givent tal om til procent, regner man den anden vej. F.eks. er

$$0{,}72 = 0{,}72 \cdot \frac{100}{100} = \frac{0{,}72 \cdot 100}{100} = \frac{72}{100} = 72\%\ .$$

I denne udregning ganger man tallet 0,72 med $\frac{100}{100}$, som er lig 1.[2] Udregningen er dog en smule besværlig, og man kan spare lidt på dette besvær ved at bemærke, at $\frac{100}{100}$ også kan skrives som 100%:

[2]Man ændrer ikke et tal ved at gange med 1, heller ikke selv om 1-tallet er skrevet som $\frac{100}{100}$.

$$0{,}72 = 0{,}72 \cdot 100\% = 72\%\ .$$

Her ganger man tallet 0,72 med 100%, som blot er en anden måde at skrive tallet 1 på.

Ofte drejer procentregning sig om at finde ud af, hvor meget en procentdel af en given størrelse er, dette gøres som i følgende sætning:

Sætning 1.1

$p\%$ af en given størrelse K_0 udregnes som

$$p\% \cdot K_0 = \frac{p}{100} \cdot K_0\ .$$

Eksempel 1.2 Hvor meget sparer man, hvis en jakke til 800 kr. bliver sat 30% ned?

Besparelsen svarer til 30% af 800 kr., dvs.

$$30\% \cdot 800 = \frac{30}{100} \cdot 800 = 0{,}3 \cdot 800 = 240\ .$$

Man sparer altså 240 kr.

Man kan også være interesseret i at finde ud af, hvor mange procent en given størrelse udgør af en anden. Dette gøres således:

Sætning 1.3

For at finde ud af, hvor mange procent K_1 udgør af K_0 beregnes

$$\frac{K_1}{K_0} \cdot 100\% \,.$$

Eksempel 1.4 Hvor stor en procentdel udgør 23 mennesker af 362 mennesker?

Svaret fås vha. følgende udregning:

$$\frac{23}{362} = 0{,}0635 = 0{,}0635 \cdot 100\% = 6{,}35\% \,.$$

23 er altså 6,35% af 362.

Eksempel 1.5 Hvor mange procent er 465 af 276?

Svaret er:

$$\frac{465}{276} = 1{,}6848 = 1{,}6848 \cdot 100\% = 168{,}48\% \,.$$

Her giver udregningen et resultat, der ligger over 100%, men det skal det også, idet 465 er større end 276, så det må derfor udgøre mere end 100%.[3]

[3] Det er vigtigt at huske på, at det altså ikke er tallenes størrelse, der bestemmer, hvilket tal, der skal divideres med; men at man altid dividerer med det tal, der sammenlignes med.

1.2 Procentvis vækst

I foregående afsnit så man på, hvordan man finder en bestemt procentdel af en størrelse, og hvordan man beregner, hvor mange procent en størrelse udgør af en anden. Det sker dog ofte, at man har brug for at beregne, hvad en størrelse vokser til, når man lægger en procentdel til, eller hvor mange procent en størrelse er større (eller mindre) end en anden.

Taleksempel Skal man lægge 12% til 140 kan man gøre det på følgende måde:

1. Først finder man 12% af 140:

$$12\% \cdot 140 = 0{,}12 \cdot 140 = 16{,}8 \,.$$

2. Dernæst lægger man den fundne værdi til de oprindelige 140, og man får resultatet:

$$140 + 16{,}8 = 156{,}8 \,.$$

I praksis viser det sig, at denne fremgangsmåde er noget besværlig. Især hvis man skal lægge en procentdel til flere gange – det kunne f.eks. være, hvis man skulle finde ud af, hvor mange penge, der står på en konto efter 1, 2, 3 eller flere år.

Heldigvis kan den ovenstående udregning forsimples en del. Skriver man de to trin sammen, kan man se, at for at lægge 12% til 140 skal man udregne:

$$140 + 12\% \cdot 140 = 140 + 0{,}12 \cdot 140 \,.$$

Her kan man sætte 140 uden for parentes, og man får

$$140 + 0{,}12 \cdot 140 = 140 \cdot (1 + 0{,}12)\ .$$

Herudfra ses, at man altså skal gange de 140 med $1 + 0{,}12 = 1{,}12$ for at lægge 12% til.

Dette giver anledning til følgende definition:

Definition 1.6

1. *Vækstraten* er tallet r, som angiver den brøkdel, en størrelse vokser med (regnet med fortegn).
2. *Fremskrivningsfaktoren* er tallet a givet ved

$$a = 1 + r.$$

Her følger to eksempler på, hvordan man beregner vækstraten og fremskrivningsfaktoren.

Eksempel 1.7 Hvis en størrelse vokser med 7,5% er vækstraten

$$r = 7{,}5\% = 0{,}075\ ,$$

og fremskrivningsfaktoren

$$a = 1 + r = 1 + 0{,}075 = 1{,}075\ .$$

Eksempel 1.8 Hvis en størrelse aftager med 11% er vækstraten

$$r = -11\% = -0{,}11\ ,$$

og fremskrivningsfaktoren

$$a = 1 + (-0{,}11) = 0{,}89\ .$$

Hvis man nu skal lægge 12% til 140, ses som før, at man skal udregne

$$140 + 12\% \cdot 140 = 140 \cdot 1{,}12\ .$$

Men det vil sige, at 140 i virkeligheden ganges med fremskrivningsfaktoren – som i dette tilfælde er $a = 1{,}12$.

Heraf følger

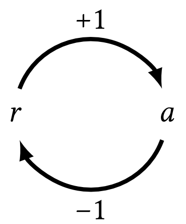
Sætning 1.9

Skal man lægge en procentdel til en størrelse K_0 får man den nye værdi

$$K_1 = K_0 \cdot a\ ,$$

hvor $a = 1 + r$ er fremskrivningsfaktoren.

I udregninger, hvor man taler om vækst i procent – eller skal se hvor mange procent større/mindre en given størrelse er i forhold til en anden – regner man altså ikke direkte med vækstraten r, men med fremskrivningsfaktoren a.



Figur 1.1: Omregning mellem vækstrate og fremskrivningsfaktor.

Man vil normalt i en given sammenhæng få opgivet vækstraten r. Ud fra denne skal man beregne fremskrivningsfaktoren a, før man regner videre. Hvis det resultat, man leder efter, er den procentvise vækst, får man også en fremskrivningsfaktor som resultat, så denne skal igen regnes om til en vækstrate (se figur 1.1).

Her følger et eksempel på, hvorledes man vha. formlen ovenfor lægger en procentdel til en størrelse:

Eksempel 1.10 Der skal lægges 25% moms på en vare til 399,96 kr. Hvor meget kommer varen til at koste?

Her er vækstraten $r = 25\% = 0{,}25$. Fremskrivningsfaktoren beregnes:

$$a = 1 + r = 1 + 0{,}25 = 1{,}25 \ .$$

Man kan så beregne prisen som

$$399{,}96 \cdot 1{,}25 = 499{,}95 \ .$$

Varens pris er altså 499,95 kr.

Nu ses på, hvordan man udregner, hvor mange procent en størrelse afviger fra en anden:

Eksempel 1.11 En vares pris falder fra 179,95 kr. til 139,95 kr. Hvor mange procent er prisen faldet?

Det ses, at formlen $K_1 = K_0 \cdot a$ kan omskrives til $a = \frac{K_1}{K_0}$. Herefter beregnes

$$a = \frac{K_1}{K_0} = \frac{139{,}95}{179{,}95} = 0{,}7777 \ .$$

Da dette er en fremskrivningsfaktor beregner vi vækstraten således

$$r = a - 1 = 0{,}7777 - 1 = -0{,}2223 = -22{,}23\% \ .$$

Varens pris er altså faldet 22,23%.[4]

[4] I dette eksempel ser man igen, at det er vækstraten man taler om, men fremskrivningsfaktoren man regner med.

1.3 Renteformlen

I foregående afsnit er beskrevet, hvordan man lægger en procentdel til en given størrelse. Men det kan ske, at man skal lægge en procentdel til flere gange. Hvis man f.eks. sætter penge ind på en konto, der giver renter, kan det være interessant at vide, hvor mange penge der står efter 2, 3 eller flere år.

Taleksempel Hvis man sætter 10 000 kr. ind på en konto, der giver 2,5% i rente p.a.,[5] hvor mange penge står der så efter 5 år?

[5] *pro anno*, dvs. pr. år

Bruger man sætning 1.9, ser man, at man skal gange de 10 000 kr. med fremskrivningsfaktoren $a = 1 + 2{,}5\% = 1{,}025$ for at finde beløbet efter 1 år. Det beløb man udregner skal man så igen gange med 1,025 for at finde beløbet efter 2 år osv. I alt skal man altså gange 10 000 kr. med 1,025 fem gange:

$$10\,000 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}025\ .$$

Som man ser, skal man altså udregne

$$10\,000 \cdot 1{,}025^5 = 11\,314{,}08\ ,$$

så efter 5 år står der 11 314,08 kr. på kontoen.

Dette kan generaliseres til en formel, som kaldes *renteformlen*.

Sætning 1.12: Renteformlen

En størrelse K_0, der vokser med vækstraten r pr. termin, er efter n terminer vokset til

$$K_n = K_0 \cdot a^n\ ,$$

hvor $a = 1 + r$ er fremskrivningsfaktoren. Formlen kan også skrives som

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n\ .$$

Der findes flere forskellige spørgsmål, man kan få svar på ved at bruge renteformlen. Et par af dem gennemgås i følgende eksempler

Eksempel 1.13 Hvis man sætter 10 000 kr. ind på en bankkonto, hvor stor skal renten så være p.a. for at beløbet er steget til 12 000 kr. på 10 år?

I dette tilfælde kender man $K_0 = 10\,000$ kr., $K_{10} = 12\,000$ kr. og $n = 10$. Indsættes disse tal i renteformlen fås

$$K_n = K_0 \cdot a^n \qquad \Rightarrow \qquad 12\,000 = 10\,000 \cdot a^{10}\ .$$

Regner man videre på denne ligning, får man

$$12\,000 = 10\,000 \cdot a^{10} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{12\,000}{10\,000} = a^{10} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[10]{\frac{12\,000}{10\,000}} = a.$$

a kan altså nu beregnes:

$$a = \sqrt[10]{\frac{12\,000}{10\,000}} = 1{,}0184.$$

Da dette er en fremskrivningsfaktor, findes den tilsvarende vækstrate ved

$$r = 1{,}0184 - 1 = 0{,}0184 = 1{,}84\%.$$

For at beløbet vokser til det ønskede, skal renten altså være 1,84% p.a.

Eksempel 1.14 I en bestemt by har der gennem de sidste 20 år været en konstant vækst i indbyggertallet på 3% om året. Hvis der på nuværende tidspunkt bor 27 541 mennesker i byen, hvor mange indbyggere var der så for 12 år siden?

For at løse dette problem, kan man anvende renteformlen, hvor man sætter $n = -12$, idet man jo skal gå 12 år *tilbage*.

Man har, at $K_0 = 27\,541$, $r = 3\%$, dvs. $a = 1{,}03$, samt at $n = -12$. Renteformlen giver da svaret

$$K_{-12} = 27\,541 \cdot 1{,}03^{-12} = 19\,317.$$

For 12 år siden havde byen altså 19 317 indbyggere.

Eksempel 1.15 I Danmark er der 5,6 mio. indbyggere. Vækstraten er på nuværende tidspunkt ca. 0,4% om året.[3] Hvis denne vækst holder sig konstant, hvor mange år går der så, før der er 6 mio. danskere?

Regner man i mio. er $K_0 = 5{,}6$. Fremskrivningsfaktoren er $a = 1 + 0{,}4\% = 1{,}004$ og $K_n = 6$. n er derimod ukendt. De kendte størrelser indsættes i renteformlen, og man får

$$K_n = K_0 \cdot a^n \qquad \Longrightarrow \qquad 6 = 5{,}6 \cdot 1{,}004^n.$$

Denne ligning løses:[6]

$$\begin{aligned} 6 &= 5{,}6 \cdot 1{,}004^n && \Longleftrightarrow \\ \frac{6}{5{,}6} &= 1{,}004^n && \Longleftrightarrow \\ \frac{\log\left(\frac{6}{5{,}6}\right)}{\log(1{,}004)} &= n && \Longleftrightarrow \\ 17{,}3 &= n\,. \end{aligned}$$

[6] Her udnyttes, at ligningen $a^x = b$ har løsningen $x = \frac{\log(b)}{\log(a)}$.

Der går altså 17,3 år, før Danmarks befolkningstal overstiger 6 mio., hvis væksten holder sig konstant på 0,4%.

1.4 Forskellige tidsperioder

I dette afsnit gennemgås, hvordan man omregner mellem fremskrivningsfaktorer (dvs. i princippet også vækstrater) for forskellige perioder.

Taleksempel Hvis man starter med at se på en størrelse, der vokser med 0,5% pr. måned, hvordan finder man så ud af, hvor meget det svarer til om året?

Renteformlen giver, at man for at fremskrive størrelsen K_0 én måned skal gange med fremskrivningsfaktoren

$$a_{\text{måned}} = 1 + 0{,}5\% = 1{,}005\,.$$

Går man nu et år frem i tiden, svarer det til 12 måneder. Ifølge renteformlen skal man altså nu gange K_0 med

$$a_{\text{måned}}^{12} = 1{,}005^{12}\,.$$

Den årlige fremskrivningsfaktor er derfor givet ved

$$a_{\text{år}} = 1{,}005^{12} = 1{,}0617\ .$$

Dette svarer til vækstraten $r_{\text{år}} = 1{,}0617 - 1 = 6{,}17\%$. En månedlig rente på 0,5% svarer således til en årlig rente på 6,17%.

Generaliserer man ovenstående udregning, får man følgende

Sætning 1.16

Hvis den årlige fremskrivningsfaktor betegnes med $a_{\text{år}}$ og den månedlige med $a_{\text{måned}}$ gælder

$$a_{\text{år}} = a_{\text{måned}}^{12}\ .$$

Denne sætning kan sagtens udvides til også at gælde for omregninger mellem andre tidsperioder end måned og år, hvilket illustreres i eksemplerne nedenfor.

Eksempel 1.17 Hvis en størrelse K_0 vokser med 4% om året, hvor mange procent vokser størrelsen så på 10 år?

Den årlige fremskrivningsfaktor er $a_{1\ \text{år}} = 1 + 4\% = 1{,}04$. Herudfra beregnes fremskrivningsfaktoren for 10 år som

$$a_{10\ \text{år}} = a_{1\ \text{år}}^{10} = 1{,}04^{10} = 1{,}4802\ .$$

Denne fremskrivningsfaktor svarer til en vækstrate på

$$r_{10\ \text{år}} = 1{,}4802 - 1 = 0{,}4802 = 48{,}02\%\ .$$

Hvis en størrelse vokser med 4% om året, vokser den altså med 48,02% på 10 år.

Man kan også anvende sætning 1.16 til at omregne fra år til måned – dvs. den modsatte vej:

Eksempel 1.18 Hvis en bank giver 2,1% i rente p.a., hvor mange procent svarer det så til i månedlig rente?

Først bemærkes, at der jo går 12 måneder på et år, så omvendt må 1 måned svare til $\frac{1}{12}$ af et år. Herefter anvendes sætning 1.16 således:

$$a_{\text{måned}} = a_{\text{år}}^{\frac{1}{12}}\ .$$

Indsætter man nu den årlige fremskrivningsfaktor $a_{\text{år}} = 1 + 2{,}1\% = 1{,}021$, får man

$$a_{\text{måned}} = 1{,}021^{\frac{1}{12}} = 1{,}00173\ .$$

En årlig rente på 2,1% svarer således til en månedlig rente på 0,173%.

1.5 Gennemsnitlig rente

I alle de foregående afsnit ses på en fremskrivning med en fast vækstrate. Hvis vækstraten forandrer sig undervejs, hvad kan man så sige om udviklingen?

Taleksempel Man sætter 1000 kr. ind på en konto. Pengene får lov at stå i 3 år, og undervejs ændrer renten sig som vist i tabel 1.2.

For at kunne bestemme, hvor mange penge, der står, efter de 3 år er gået, skal man kende de tilhørende fremskrivningsfaktorer. Disse er beregnet i sidste kolonne i tabel 1.2.

Tabel 1.2: Renten r_i og fremskrivningsfaktoren a_i på en konto over 3 år.

År	r_i	a_i
1	2,7%	1,027
2	3,0%	1,030
3	1,5 %	1,015

Nu kan det indestående beløb beregnes som

$$\begin{aligned} K_3 &= K_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \\ &= 1000 \cdot 1{,}027 \cdot 1{,}030 \cdot 1{,}015 = 1073{,}68\ . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dvs. der står 1073,68 kr. på kontoen.

Hvis man i stedet havde fået en fast rente, hvilken størrelse skulle denne så have, for at der står det samme beløb på kontoen efter 3 år? Her er man altså ude efter at finde en *gennemsnitlig vækstrate.*

For at svare på dette spørgsmål, kan man igen se på renteformlen. Hvis man kalder den *gennemsnitlige fremskrivningsfaktor* for $\overline{a}$, har man nemlig

$$K_3 = K_0 \cdot \overline{a}^3\ .$$

Da dette skal give det samme resultat som ovenfor, at $K_3 = 1073{,}68$, kan man ved at sammenligne med (1.1) konstatere, at der må gælde

$$\overline{a}^3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3\ .$$

Herudfra ses, at

$$\overline{a} = \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}\ .$$

Den gennemsnitlige fremskrivningsfaktor bliver altså i dette tilfælde

$$\overline{a} = \sqrt[3]{1{,}027 \cdot 1{,}030 \cdot 1{,}015} = 1{,}02398\ .$$

Den tilsvarende gennemsnitlige vækstrate bliver så

$$\overline{r} = \overline{a} - 1 = 1{,}02398 - 1 = 2{,}398\%\ .$$

Mere generelt kan man sige, at der gælder følgende

Sætning 1.19: Gennemsnitlig rente

Hvis en størrelse vokser gennem n terminer med fremskrivningsfaktorerne $a_1, a_2, \dots, a_n$, er den gennemsnitlige fremskrivningsfaktor pr. termin givet ved

$$\overline{a} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}\ .$$

Den gennemsnitlige vækstrate er derfor givet ved

$$\overline{r} = \sqrt[n]{(1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n)} - 1\ .$$

Eksempel 1.20 Indbyggertallet i en by vokser med en varierende procentdel over en 5-års periode. Væksten ses i tabel 1.3.

Tabel 1.3: Vækstrate r_i og fremskrivningsfaktor a_i for indbyggertallet i en by i år i.

i	r_i	a_i
1	2,2%	1,022
2	3,1%	1,031
3	−1,2%	0,988
4	4,2%	1,042
5	6,0%	1,060

At r_3 er negativ, betyder blot, at indbyggertallet falder i det pågældende år.

For at finde frem til den gennemsnitlige vækst i procent i løbet af de 5 år, beregnes de 5 fremskrivningsfaktorer (se tabel 1.3).

Nu kan den gennemsnitlige fremskrivningsfaktor findes:

$$\overline{a} = \sqrt[5]{1{,}022 \cdot 1{,}031 \cdot 0{,}988 \cdot 1{,}042 \cdot 1{,}060} = 1{,}02832 \; .$$

Den gennemsnitlige vækstrate i løbet af de 5 år er derfor

$$\overline{r} = 1{,}02832 - 1 = 0{,}02832 = 2{,}832\% \; .$$

1.6 Øvelser

Øvelse 1.1
Omskriv til decimaltal:

a) 3% b) 6,12% c) 36,7%
d) 89,2% e) 142% f) 3251%

Øvelse 1.2
Omskriv til procent:

a) 0,14 b) 0,587 c) 1,043
d) 4,12 e) 0,051 f) 0,0093

Øvelse 1.3
Hvor meget er

a) 21% af 5613? b) 6,5% af 10.214?
c) 141 % af 45,32?

Øvelse 1.4
Hvor mange procent er

a) 45 af 89? b) 34 af 27?
c) 12 af 6539? d) 0,32 af 21?

Øvelse 1.5
En møbelforretning sælger en stol på udsalg for 398 kr. Normalprisen er 585 kr.

Hvor mange procent er rabatten på?

Øvelse 1.6
En tom sodavandsdåse vejer 25 g. Den fyldes med 330 g sodavand.

Hvor mange procent af den samlede vægt udgør dåsen?

Øvelse 1.7
En tom sodavandsflaske vejer 253 g. Den fyldes med 250 g sodavand.

Hvor mange procent af den samlede vægt udgør flasken?

Øvelse 1.8
I 1970 vejede en konservesdåse 68,4 g, mens den i 1993 fremstilledes, så den kun vejede 56,7 g.

Hvor mange procent vejede dåserne mindre i 1993 end i 1970?

Øvelse 1.9
I 1950 vejede en øldåse 90,7 g, mens den i 1993 fremstilledes, så den kun vejede 17 g.

a) Hvor mange procent vejede dåserne mere i 1950 end i 1993?

b) Hvor mange procent vejede de mindre i 1993 end i 1950?

Øvelse 1.10
Jorden kredser om solen i en ellipseformet bane. Når jorden er tættest på solen (i begyndelsen af januar) er afstanden 147,1 mio. km. Når jorden er længst væk fra solen (i begyndelsen af juli) er afstanden 152,1 mio. km.

a) Hvor mange procent er den største afstand større end den mindste?

b) Hvor mange procent er den mindste afstand mindre end den største?

Øvelse 1.11
Månen kredser om jorden i en ellipseformet bane. Når månen er tættest på jorden, er afstanden 363300 km. Når månen er længst væk fra jorden, er afstanden 405500 km.

a) Hvor mange procent er den største afstand større end den mindste?
b) Hvor mange procent er den mindste afstand mindre end den største?

Øvelse 1.12
I forbindelse med varekøb og tjenesteydelser betaler man moms. Momsen er 25%. En håndværkerregning lyder på 6250 kr. uden moms.

a) Hvor meget kommer regningen til at lyde på i alt?

En anden håndværkerregning lyder på 9456,90 kr. med moms.

b) Hvad lyder regningen på uden moms?

Øvelse 1.13
Et firma yder i en vis periode en rabat på 10%. Når firmaet laver regningen kan rabatten trækkes fra før eller efter at momsen lægges til.

Betyder det noget for køberen, hvilken rækkefølge det sker i?

Øvelse 1.14
10 000 kr. sættes ind på en konto til en årlig rente på 2,5%.

Hvor meget er beløbet vokset til efter 5 år?

Øvelse 1.15
Efter 7 år er et beløb vokset til 7994,18 kr. Renten er 3% p.a.

Hvor mange penge blev der oprindeligt sat ind på kontoen?

Øvelse 1.16
150 000 kr. sættes ind på en konto. Efter 3 år er beløbet vokset til 178 652,40 kr.

Hvad har renten været?

Øvelse 1.17
7000 kr. sættes ind på en konto til en årlig rente på 1,5%. Efter et antal år står der 7429,54 kr. på kontoen.

Hvor mange år er der gået?

Øvelse 1.18
I en given periode stiger lønningerne med 2% pr. halvår. Hvor mange procent er lønstigningerne på 3 år.

Øvelse 1.19
Et bilfirma reklamerer med, at man ved afbetalingskøb hos firmaet kan slippe med en rente på 2,5% pr måned.

Omregn denne rentefod til årlig rente.

Øvelse 1.20
En bank reklamerer med en opsparingskonto, hvor renten er 3,6% p.a.

Hvor meget svarer det til i månedlig rente?

Øvelse 1.21
De første tre år voksede værdien af en aktie med henholdsvis 13%, 23% og 34%. Det næste år faldt aktiens værdi med 17%.

Hvor mange procent er aktien vokset med i gennemsnit pr. år?

Øvelse 1.22
Værdien af en sjælden mønt vokser på 11 år med 78%.

Hvad er den gennemsnitlige årlige procentvise værditilvækst?

Øvelse 1.23
I femårsperioden 2005–2010 steg en virksomheds produktion med 5% om året. Hvor mange procent var produktionen større i 2010 end i 2005?

Øvelse 1.24
For tre år siden udtalte direktøren i et firma, at firmaet som målsætning havde at øge sin værdi med i gennemsnit 10% pr. år i en femårig periode. De første 3 år har firmaet kun øget sin værdi med 4,5% pr. år.

Hvor meget skal firmaet i gennemsnit øge sin værdi med de sidste to år, for at nå sit mål?

Indekstal 2

Inden for økonomi og statistik benytter man sig ofte af de såkaldte *indekstal*. Indekstal angiver værdien af en given størrelse i forhold til et bestemt år, kaldet *basisåret*. Indekstallet for et bestemt år angives som værdien i forhold til basisåret gange 100.

Er en størrelse vokset med 13% i forhold til basisåret, vil denne udtrykkes som indekstallet 113, mens et fald på 5% i forhold til basisåret udtrykkes som indekstallet 95.

Taleksempel Den gennemsnitlige årsindkomst for danskere over 14 år (for 5 udvalgte år) ses i tabel 2.1.

Tabel 2.1: Gennemsnitlig årsindkomst, 2012–2016.[4]

År	Løn (kr.)
2012	288 684
2013	293 979
2014	298 785
2015	308 144
2016	312 649

Denne udvikling beskrives nu i indekstal med 2012 som basisår. Værdien i år 2012 (288 684 kr.) sættes altså til 100, og de resterende værdier beregnes herudfra.

Den procentdel som den gennemsnitlige årsindkomst i 2013 udgør af værdien i 2012 er

$$\frac{293\,979}{288\,684} = 1{,}018 = 101{,}8\% \,.$$

Indekstallet for 2001 er derfor 101,8.

Den gennemsnitlige årsindkomst i 2014 udgør

$$\frac{298\,785}{288\,684} = 1{,}035 = 103{,}5\% \,,$$

dvs. indekstallet for 2014 er 103,5. Bemærk, at indekstallene angives *uden %-tegn*.

På samme måde udregnes de resterende to indekstal og man får tallene i tabel 2.2. Vælger man i stedet et andet basisår, får man selvfølgelig andre værdier. Med 2014 som basisår fås tabel 2.3.

Tabel 2.2: Indekstal for gennemsnitlig årsindkomst med basisår 2012.

År	Indeks
2012	100
2013	101,8
2014	103,5
2015	106,7
2016	108,3

Tabel 2.3: Indekstal for gennemsnitlig årsindkomst med basisår 2014.

År	Indeks
2012	96,6
2013	98,4
2014	100
2015	103,1
2016	104,6

2.1 Procentvise ændringer

Når man taler om procentvise ændringer af indekstal er det vigtigt at skelne mellem to ting: Ændring i procent og ændring i procent*point*. Det sidste fænomen gennemgås først.

Procentpoint Når man taler om ændringen i procentpoint, ser man på hvad forskellen på de to indekstal, man sammenligner, er.

Ser man f.eks. på indekstallene med basisår 2012 fra taleksemplet ovenfor, ser man at forskellen på indeks for år 2016 og 2014 er

$$108{,}3 - 103{,}5 = 4{,}8 \; .$$

Der er altså sket en vækst på 4,8 procentpoint fra 2014 til 2016.

Som det ses af ovenstående, er det meget vigtigt at huske, at *ændringen i procentpoint er afhængig af, hvilket år, man har valgt som basisår.*

Procent Hvis man skal se på, hvor stor stigningen fra 2013 til 2014 er i procent, skal man i stedet sammenligne de to tal ved at udregne

$$\frac{108{,}3}{103{,}5} = 1{,}046 \; .$$

Dette er en fremskrivningsfaktor. Den tilsvarende vækstrate er $1{,}046 - 1 = 0{,}046$. Væksten fra er 2014 til 2016 er altså på 4,6%. Som man ser, er det altså ikke underordnet om man taler om vækst i procent eller vækst i procentpoint.

Her følger to eksempler, der behandler nogle udregninger, der kan være praktiske i forbindelse med indekstal:

Tabel 2.4: Danmarks produktion af biogasenergi med 2012 som basisår.[6]

År	Indeks
2012	100
2013	107,9
2014	128,9
2015	158,0
2016	225,6

Eksempel 2.1 (Absolutte tal) I tabel 2.4 er angivet Danmarks produktion af energi fra biogas i årene 2012 til 2016 med 2012 som basisår.

Får man nu at vide, at produktionen af biogasenergi i 2014 var 1328 GWh finder man produktionstallet for et andet år ved at udregne fremskrivningsfaktoren for ændringen fra det pågældende år til 2014, og gange op med denne.

Fremskrivningsfaktoren, når man går fra 2012 til 2014, er $\frac{100}{128{,}9}$, så produktionen af biogasenergi i 2012 var

$$\frac{100}{128{,}9} \cdot 1328 = 1030 \; ,$$

dvs. 1030 GWh.

Tabel 2.5: Danmarks produktion af biogasenergi, 2012–2016.

År	Biogasenergi (GWh)
2012	1030
2013	1112
2014	1328
2015	1627
2016	2324

På samme måde udregner man tallet for 2013:

$$\frac{107{,}9}{128{,}9} \cdot 1328 = 1112 \; .$$

Altså var produktionen af biogasenergi i 2013 på 1112 GWh.

Udregnes værdien for alle de manglende tre år, får man tabel 2.5.

Eksempel 2.2 (Skift af basisår) Her ses på de samme tal som i eksempel 2.1, se tabel 2.4.

Somme tider kan det være en fordel at skifte basisår. Dette kunne f.eks. være, hvis man skal sammenligne to forskellige indeks, der har forskellige basisår.

Hvis tabellen skal regnes om til basisår 2014, beregner man igen den procentvise værdi i forhold til basisåret. Dette er nu 2014, så man får for 2012:

$$\frac{100}{128{,}9} = 0{,}776 \ .$$

Dvs. indeks for 2012 er nu 77,6.

For 2013 fås

$$\frac{107{,}9}{128{,}7} = 0{,}837 \ ,$$

altså er indeks 87,3.

De nye indekstal bliver så tallene i tabel 2.6.

Tabel 2.6: Danmarks produktion af biogasenergi med 2014 som basisår.

År	Indeks
2012	77,6
2013	83,7
2014	100
2015	122,5
2016	175,0

2.2 Øvelser

Øvelse 2.1
Tabellen viser indekstal på prisen for en Kung Fu-is i tre forskellige årstal.[7]

År	Indeks
1977	19,4
1999	100
2014	166,7

I 2014 kostede en Kung Fu-is 15 kr.

a) Hvad kostede isen i 1977 og i 1999?

Øvelse 2.2
Den gennemsnitlige forbrugerpris på benzin i januar det pågældende år ses i skemaet:[5]

År	Pris (kr.)
1995	5,80
2000	7,85
2005	8,55
2010	10,53
2015	10,79
2019	11,59

a) Udregn indekstal for forbrugerprisen på benzin fra 2000 til 2019 med 2000 som basisår.

b) Bestem den procentvise ændring fra 2005 til 2015 samt fra 2010 til 2019 for benzinprisen.

Øvelse 2.3
I tabellen ses befolkningstallene for Fyn, Jylland og Sjælland i nogle af årene fra 1976 til 2019.[2]

Årstal	Fyn	Jylland	Sjælland
1976	412 450	1 894 541	2 163 685
1990	426 106	1 982 364	2 134 816
2000	439 608	2 067 637	2 235 839
2010	454 358	2 160 878	2 348 684
2019	469 724	2 258 499	2 530 093

a) Bestem indekstal for befolkningstallene for Fyn, Jylland og Sjælland med basisår 2000.

b) Afgør ved beregning, hvor befolkningstallet er vokset procentvis mest fra 1976 til 2019.

Øvelse 2.4
Nedenstående tabel viser det gennemsnitlige forbrug af alkohol pr. dansker, dels målt i målt i liter, dels angivet som indekstal med år 2000 som basisår.[1]

Årstal	Salg (liter)	Indekstal
2000	9,5	100
2005		96,8
2010		88,4
2015	7,8	

a) Bestem forbruget i 2005.
Bestem indekstallet for 2015.

b) Hvor mange procent er forbruget af vin og spiritus i gennemsnit faldet om året i perioden 2000–2015?

3 Annuiteter

Hvis man betaler til en opsparingskonto i en bank, kan man ikke bruge renteformlen til at beregne, hvor mange penge, der vil stå på kontoen. På en opsparingskonto indbetaler man jo ikke et beløb én gang, men sætter i stedet løbende penge ind.

Taler man om lån, kan man heller ikke bruge renteformlen til udregninger, idet et lån kører på den måde, at man afbetaler på lånet hver termin, mens der også løbende tilskrives renter.

3.1 Opsparingsannuitet

En opsparingsannuitet er en opsparingskonto, hvor der indbetales lige store beløb med lige lange mellemrum.

Hvis renten er fast viser det sig, at man kan udlede en formel til beregning af, hvor mange penge, der står på kontoen efter et bestemt antal indbetalinger.

Taleksempel Her ses på en konto med en rentefod (vækstrate) på 1,5% p.a., hvor der ved hver indbetaling indsættes 10 000 kr. Hvis indbetalingerne påbegyndes 2.1.2018, og falder på den 2.1 hvert år, vil man efter 4 indbetalinger være nået frem til 2.1.2021. Her har man altså sparet penge op over 3 år, men antallet af indbetalinger er 4. Skal man beregne, hvor mange penge, der står på kontoen umiddelbart efter den 4. indbetaling, kan man gå frem på følgende måde:

Det beløb man indsætter hvert år kaldes *ydelsen*, b. Den årlige vækstrate kaldes r, antallet af indbetalinger kaldes n, og saldoen på kontoen, kaldes A_n. I det givne eksempel har man altså

$$b = 10\,000\ , \qquad r = 0{,}015 \qquad \text{og} \qquad n = 4.$$

Størrelsen A_4, som svarer til saldoen på kontoen efter de 4 indbetalinger, er ukendt og skal beregnes. Ser man på, hvad der sker med indbetalingerne, har man, at

Den 2.1.2018 indsættes 10 000 kr. Dette beløb forrentes i 3 år frem til 2.1.2021, hvor beløbet er vokset til $10\,000 \cdot 1{,}015^3$ (ifølge renteformlen).

Den 2.1.2019 indsættes igen 10 000 kr., der forrentes i 2 år frem til 2.1.2021, hvor beløbet er vokset til $10\,000 \cdot 1{,}015^2$.

Den 2.1.2020 indsættes 10 000 kr., der forrentes 1 år, så beløbet vokser til $10\,000 \cdot 1{,}015$.

Den 2.1.2021 indsættes 10 000 kr.

Det samlede beløb på kontoen fås ved at lægge de 4 værdier ovenfor sammen, således at

$$A_4 = 10\,000 + 10\,000 \cdot 1{,}015 + 10\,000 \cdot 1{,}015^2 + 10\,000 \cdot 1{,}015^3.$$

Her ses, at man kan sætte 10 000 uden for parentes, så man har

$$A_4 = 10\,000 \cdot (1 + 1{,}015 + 1{,}015^2 + 1{,}015^3) = 40\,909{,}03\ . \tag{3.1}$$

Dette er altså saldoen på kontoen efter 4 indbetalinger. De 40 000 kr. svarer til indbetalingerne, mens de resterende 909,03 kr. er påløbne renter.

Denne fremgangsmåde kan sagtens anvendes til at beregne saldoen på en opsparingskonto, men i praksis bliver parentesen i (3.1) hurtigt besværlig at regne ud. Hvis man f.eks. skulle se på saldoen efter 15 indbetalinger, bliver udregningen meget lang. Det viser sig, at man i stedet kan anvende følgende

Sætning 3.1: Opsparingsannuitet

For en opsparingsannuitet, gælder

$$A_n = b \cdot \frac{a^n - 1}{r},$$

hvor A_n er saldoen efter sidste indbetaling, b er ydelsen, dvs. indbetalinger pr. termin, r er vækstraten, n er antal indbetalinger, og $a = 1 + r$ er fremskrivningsfaktoren. Denne sammenhæng kan også skrives som

$$A_n = b \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}.$$

Beviset for formlen kan ses i afsnit 3.3.

Eksempel 3.2 Der indbetales hvert år 2000 kr. på en opsparingskonto, hvor renten er 1,3% p.a. Hvis der indbetales 10 gange er

$$b = 2000\ , \qquad r = 0{,}013\ , \qquad a = 1{,}013 \qquad \text{og} \qquad n = 10\ .$$

Umiddelbart efter den 10. indbetaling er saldoen på kontoen derfor

$$A_{10} = 2000 \cdot \frac{1{,}013^{10} - 1}{0{,}013} = 21\,211{,}50\ .$$

Dvs. saldoen er 21 211,50 kr.

Kender man ikke ydelsen, kan man beregne den som i dette eksempel:

Eksempel 3.3 Hvis man ønsker at spare 50 000 kr. op med 15 årlige indbetalinger, hvor meget skal man så indbetale, hvis renten er 2,1%?

I dette tilfælde kender man størrelserne

$$r = 0{,}021\ , \qquad a = 1{,}021\ , \qquad n = 15 \qquad \text{og} \qquad A_{15} = 50\,000\ .$$

Indsættes disse størrelser i formlen fås

$$\begin{aligned} 50\,000 &= b \cdot \frac{1{,}021^{15}-1}{0{,}021} && \Longleftrightarrow \\ 50\,000 \cdot \frac{0{,}021}{1{,}021^{15}-1} &= b && \Longleftrightarrow \\ 2870{,}45 &= b . \end{aligned}$$

Vil man spare 50 000 kr. op med 15 årlige indbetalinger, skal der altså hvert år indbetales 2870,45 kr.

Hvis antallet af indbetalinger er ukendt, bliver udregningen en smule mere besværlig:

Eksempel 3.4 Hvis man hvert år indbetaler 6000 kr. på en konto til 2,3% i rente, hvor mange indbetalinger kræver det så, for at man kan spare 75 000 kr. sammen?

Her kender man

$$b = 6000\ , \qquad r = 0{,}023\ , \qquad a = 1{,}023 \qquad \text{og} \qquad A_n = 75\,000\ .$$

Indsat i formlen giver det

$$75\,000 = 6000 \cdot \frac{1{,}023^n - 1}{0{,}023}\ .$$

Løsningen til denne ligning er

$$n = 11{,}11\ .$$

Her kan man se, at det altså ikke er helt nok at indbetale 11 gange, der skal 12 indbetalinger til. Det samme resultat kunne man selvfølgelig også være nået frem til ved at prøve efter med forskellige værdier af n.

3.2 Annuitetslån

Nu vendes blikket mod tilbagebetaling af gæld. Mange lån afvikles på den måde, at låntageren betaler et fast beløb (kaldet ydelsen) hver termin (f.eks. hver måned, kvartal eller år) til långiveren. Ydelsen dækker de renter, der er løbet på siden sidste indbetaling, mens den resterende del, bruges til at gøre gældsbeløbet mindre. Det oprindelige gældsbeløb (dvs. de penge, man har lånt) kaldes *hovedstolen.*

Hvordan tilbagebetalingen af et sådant lån – et *annuitetslån* – sker, belyses i dette eksempel:

Taleksempel Den 2.1.2018 optages et lån på 20 000 kr. Vækstraten er 9%, og ydelsen er fastsat til 3000 kr. om året. Ydelsen betales 2.1, og på denne dato foretages også rentetilskrivning. Tilbagebetalingen fortsætter til lånet er afviklet. *Løbetiden* er det antal terminer, der går indtil lånet er nede på 0, og den kan beregnes. Der sker nu følgende:

2.1.2019: Der tilskrives 9% i rente, så gælden vokser til

$$20\,000 \cdot 1{,}09 = 21\,800 \ .$$

Herfra trækkes ydelsen på 3.000 kr., så restgælden er nu

$$21\,800 - 3000 = 18\,800 \ .$$

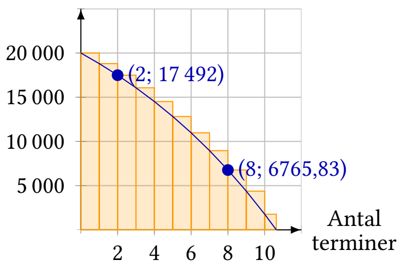
Bemærk, at betalingen på 3000 kr. kun har formindsket gælden med 1200 kr.

2.1.2020: Der tilskrives igen 9% i rente (til restgælden på 18 800 kr.), så gælden er nu

$$18\,800 \cdot 1{,}09 = 20\,492 \ .$$

Fra dette beløb trækkes igen ydelsen på 3000 kr., så restgælden er

$$20\,492 - 3000 = 17\,492 \ .$$



Figur 3.1: Et lån på 20 000 kr. tilbagebetales med en ydelse på 3000 kr. og en rente på 9%.

På denne måde fortsætter man med at betale tilbage, indtil restgælden er nede på 0. Man kan beregne, at løbetiden er ca. 11 terminer, så låntageren kommer til at betale ca. $11 \cdot 3000$ kr. = 33 000 kr. for at låne de 20 000 kr. På figur 3.1 ses, hvorledes restgælden udvikler sig med tiden.

Det viser sig, at man kan regne på annuitetslån vha. følgende formel:

Sætning 3.5: Gældsannuitet

For et annuitetslån gælder

$$G = y \cdot \frac{1 - a^{-n}}{r} \qquad \text{og} \qquad y = G \cdot \frac{r}{1 - a^{-n}},$$

hvor G er hovedstolen, y er ydelsen, r er vækstraten, n er løbetiden, og $a = 1 + r$ er fremskrivningsfaktoren.

Disse formler kan også skrives som

$$G = y \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \qquad \text{og} \qquad y = G \cdot \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}}.$$

Beviset for denne sætning kan ses i afsnit 3.3.

Eksempel 3.6 (Ukendt hovedstol) Hvis man har råd til at optage et lån til 500 kr. om måneden i 3 år og den årlige rente er 8%, hvor mange penge kan man så låne?

Her ses, at det beløb, man betaler om året er $12 \cdot 500$ kr. = 6000 kr. Altså er

$$y = 6000 \ , \qquad r = 0{,}08 \ , \qquad a = 1{,}08 \qquad \text{og} \qquad n = 3 \ .$$

Sætning 3.5 giver da, at den samlede gæld er

$$G = 6000 \cdot \frac{1 - 1{,}08^{-3}}{0{,}08} = 15\,462{,}58$$

Man har altså råd til at låne 15 462,58 kr.

Til gengæld skal man huske på, at det, man rent faktisk kommer til at betale tilbage, er $3 \cdot 6000$ kr. = 18 000 kr.

Situationen i eksemplet ovenfor er nok en anelse uvirkelig. Ofte ved man jo præcis, hvor mange penge, man vil låne. Men sætning 3.5 kan også bruges til at regne ud, hvad ydelsen vil være, hvis man kender lånets størrelse og løbetid.

Eksempel 3.7 (Ukendt ydelse) Hvis man låner 50 000 kr. og ønsker at betale dem tilbage over 5 år, hvor stor er ydelsen så, hvis renten er 12%?

Her kender man

$$G = 50\,000\ , \qquad r = 0{,}12\ , \qquad a = 1{,}12 \qquad \text{og} \qquad n = 5.$$

Indsat i formlen fra sætning 3.5 giver det

$$y = 50\,000 \cdot \frac{0{,}12}{1 - 1{,}12^{-5}} = 13\,870{,}49\ .$$

Det er altså det beløb, der skal betales tilbage om året. Den tilsvarende månedlige ydelse bliver så

$$y_{\text{måned}} = \frac{13\,870{,}49}{12} = 1155{,}87\ ,$$

altså en månedlig ydelse på 1155,87 kr.

3.3 Bevis for annuitetsformlerne

I dette afsnit bevises formlerne i sætning 3.1 og sætning 3.5.

Bevis (for sætning 3.1)
Betragter man ligningen (3.1), ses at denne kan generaliseres til

$$A_n = b \cdot (1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}).$$

Nu defineres

$$S = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}.$$

Der gælder altså $A_n = b \cdot S$. Tillige gælder der, at

$$a \cdot S = a \cdot (1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n.$$

Beregner man nu størrelsen $(a-1) \cdot S$ fås

$$\begin{aligned}(a-1) \cdot S &= a \cdot S - S \\ &= (a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n) - (1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) \\ &= a^n - 1\end{aligned}$$

Dette giver, at

$$(a-1) \cdot S = a^n - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad S = \frac{a^n - 1}{a - 1},$$

og da $a - 1 = r$, er

$$S = \frac{a^n - 1}{r}.$$

Fra tidligere haves, at $A_n = b \cdot S$, så derfor er

$$A_n = b \cdot \frac{a^n - 1}{r},$$

og sætningen er hermed bevist. ■

I beviset for sætning 3.5 anvender man sætning 3.1 og renteformlen.

Bevis (for sætning 3.5)
Når man afdrager en gæld med n lige store ydelser y, vil den samlede værdi af disse ydelser kunne beregnes ud fra formlen for annuitetsopsparing (sætning 3.1). Kaldes denne størrelse K, har man

$$K = y \cdot \frac{a^n - 1}{r}.$$

Men gælden blev optaget n terminer tidligere, så gældens værdi fremskrevet n terminer er også lig med K, som ifølge renteformlen så skal være

$$K = G \cdot a^n.$$

Disse to udtryk for K må nødvendigvis være lig hinanden, dvs.

$$\begin{aligned} G \cdot a^n &= y \cdot \frac{a^n - 1}{r} && \Leftrightarrow \\ G &= y \cdot \frac{a^n - 1}{r \cdot a^n} && \Leftrightarrow \\ G &= y \cdot \frac{\frac{a^n}{a^n} - \frac{1}{a^n}}{r} && \Leftrightarrow \\ G &= y \cdot \frac{1 - a^{-n}}{r}. \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist. ∎

3.4 Øvelser

Øvelse 3.1
Lad $A_n = 1200$ kr., $r = 2\%$ og $n = 8$.

Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme b.

Øvelse 3.2
Lad $b = 1273$ kr., $r = 11{,}11\%$ og $n = 7$.

Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme A_n.

Øvelse 3.3
Lad $A_n = 6170$ kr., $r = 4\%$ og $b = 193$ kr..

Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme n.

Øvelse 3.4
Lad $A_n = 3000$ kr., $b = 300$ kr. og $n = 8$.

Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme r med 2 decimaler. (Opstil en ligning og brug et CAS-værktøj til løsningen.)

Øvelse 3.5
På en annuitetsopsparingskonto er det faste månedlige beløb 1620 kr., og den månedlige rente er 1%.

Hvad er saldoen efter den 9. indbetaling?

Øvelse 3.6
En familie kan hver måned sætte 8000 kr. i banken. De tilbydes en konto med en månedlig rente på 0,75%.

Hvor mange måneder skal familien indsætte penge for at saldoen overstiger 250 000 kr.?

Øvelse 3.7
En familie ønsker at spare op til udbetalingen på et hus, der koster 4 000 000 kr. Udbetalingen er på 10% af husprisen. De kan få 0,4% i månedlig rente i deres bank.

Hvor stor skal den månedlige indbetaling være, hvis familien ønsker at have til udbetalingen efter 48 indbetalinger?

Øvelse 3.8
Jørgen har hvert kvartal indbetalt 4050 kr. på en konto i banken. Efter 27. kvartalsvise indbetaling er det blevet til 150 000 kr.

a) Hvad har den kvartalsvise rente været (med 2 decimaler)?

b) Hvilken årlig rente svarer en sådan kvartalsvis rente til?

Øvelse 3.9
På en annuitetsopsparingskonto indbetaler en mand 1835 kr. om året til en årlig rente på 4,3%.

a) Hvad står der på kontoen umiddelbart efter den 28. indbetaling?

b) Hvor meget har han fået i rente?

Manden bliver nu kontaktet af en anden bank, der tilbyder en annuitetsopsparing med en årlig rente, der er det dobbelte af renten på den gamle konto.

c) Besvar for den nye rente de samme to spørgsmål som ovenfor.

d) Betyder en fordobling af renten en fordobling af opsparingen og af den samlede rentetilskrivning?

Øvelse 3.10
Niels beslutter at indbetale 3000 kr. hver måned på en konto, hvor han får 0,8% i rente pr. måned.

a) Hvor meget vil der stå på kontoen umiddelbart efter den 15. indbetaling?

Det viser sig, at Niels får nogle uforudsete udgifter, så han kun når at foretage 10 indbetalinger. Han lader derefter pengene stå i 5 måneder til den aftalte rente.

b) Hvor meget står der så på kontoen?

c) Hvor meget mister Niels i renteindtægt ved at afholde sig fra at indbetale de sidste 5 gange?

Øvelse 3.11
Lad $G = 150\,000$ kr., $r = 2{,}5\%$ og $n = 14$.

Benyt formlen for annuitetslån til at bestemme y.

Øvelse 3.12
Lad $y = 12\,000$ kr., $r = 4{,}5\%$ og $n = 28$.

Benyt formlen for annuitetslån til at bestemme G.

Øvelse 3.13
Lad $G = 12\,345$ kr., $y = 719{,}74$ kr. og $r = 4{,}44\%$.

Benyt formlen for annuitetslån til at bestemme n.

Øvelse 3.14
Lad $G = 12\,000$ kr., $y = 1000$ kr. og $n = 15$.

Benyt formlen for annuitetslån til at bestemme r (2 decimaler). (Opstil en ligning og løs den vha. et CAS-værktøj.)

Øvelse 3.15
Vivi har købt sig en scooter på afbetaling. Scooteren koster 23 000 kr., men Vivi giver 20% i udbetaling ved købet. Restbeløbet betaler hun i 48 lige store rater.

Hvor meget betaler hun pr. måned, når cykelhandleren tager 2,5% i rente pr. måned?

Øvelse 3.16
Hos »Ærlige Bents Cykler & Knallerter« tilbydes et annuitetslån til en mountainbike til kun 17 000 kr. Der er månedlige terminer, og den månedlige rente er på 2%. Løbetiden på lånet er på 8 år.

a) Bestem den månedlige ydelse.

b) Hvor meget kommer man til at betale i rente på lånet?

Øvelse 3.17
Åge Knudsen tilbydes et annuitetslån på 45 000 kr. med årlige terminer og en årlig rente på 5,6%. Han skal betale lånet tilbage på 7 år.

Bestem den månedlige ydelse.

Øvelse 3.18
Hvor meget kan Gurli højst tillade sig at låne i en bank, når hun i sit budget kan undvære 2000 kr. pr. halvår, banken tager 5% i rente pr. halvår, og lånet skal betales tilbage over 6 år?

Øvelse 3.19
Bente skal giftes og får derfor syet en brudekjole for 55 000 kr. i en brudeforretning. Kjolen kan enten betales i 60 lige store månedlige rater med en rente på 2% pr. måned – eller i 72 lige store rater med en rente på 1,75% pr. måned.

a) Hvad kommer Bente af med pr. måned efter hver af de to betalingsmåder?

b) Hvad kommer Bente i alt til at betale for kjolen efter hver af de to betalingsmåder?

Bibliografi

[1] Danmarks Statistik. *ALK02: Forbrug og salg af alkohol og tobak pr. indbygger efter type og tid.* URL: http://statistikbanken.dk/ (sidst set 01.04.2019).

[2] Danmarks Statistik. *BEF4: Folketal 1. januar efter øer og tid.* URL: http://statistikbanken.dk/ (sidst set 01.04.2019).

[3] Danmarks Statistik. *FOLK1A: Folketal den 1. i kvartalet efter område, køn, alder, og civilstand.* URL: http://statistikbanken.dk/ (sidst set 05.01.2016).

[4] Danmarks Statistik. *INDKP102: Indkomst i alt efter indkomstinterval, køn, enhed, region og tid.* URL: http://www.statistikbanken.dk/ (sidst set 17.10.2017).

[5] Drivkraft Danmark. *Prisudvikling på benzin.* URL: https://www.drivkraftdanmark.dk/priser/benzin/ (sidst set 01.04.2019).

[6] Energinet. *Sammen om bæredygtig energi: Årsrapport 2016.* Energinet.dk, 2016.

[7] Kristian Herlufsen. *Kung-Fu og Guld Strut: Se isplakater fra 1970'erne og frem til i dag.* URL: https://samvirke.dk/ (sidst set 02.04.2019).