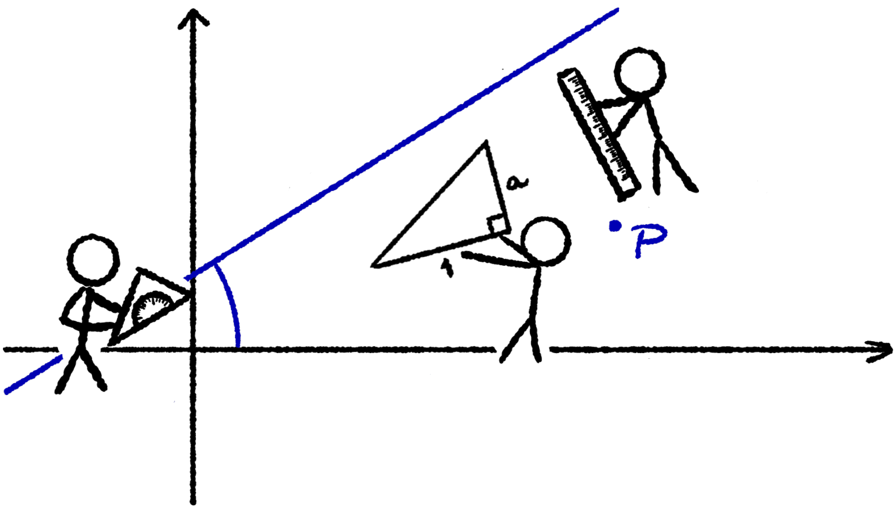
Geometri

Version 1.0
6. august 2024



Mike Vandal Auerbach
www.mathematicus.dk

Geometri
Version 1.0, 2024

Disse noter dækker kernestoffet i geometri og trigonometri på stx A- og B-niveau efter de nye læreplaner i 2024.

Enkelte grafer/figurer er markeret med symbolet der fungerer som link til et interaktivt GeoGebra-arbejdsark. Se også www.geogebra.org.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

Indhold

1 Trigonometri

Trigonometri betyder *trekantsmåling*. Før man kaster sig over trigonometrien, giver det derfor mening at opsummere et par generelle ting om trekanter.

1.1 Trekanter

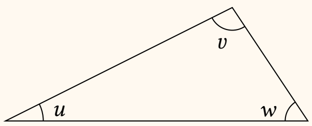
En trekant kan beskrives ud fra de tre punkter der udgør hjørnerne i trekanten. Trekanten ABC er således den trekant der har hjørner i de tre punkter A, B og C. Den side i trekanten der går fra punkt A til B, kan så kaldes AB. Længden af siden AB betegnes med $|AB|$.

I en trekant er der tre vinkler. Der gælder følgende kendte sætning om vinkler som ikke bevises:

Sætning 1.1

Summen af vinklerne i en trekant er 180°:

$$u + v + w = 180^\circ \ .$$



Fra hvert hjørne i en trekant kan man tegne de følgende tre linjer:

Medianen som er en linje fra en vinkelspids til *midten* af den modstående side.

Vinkelhalveringslinjen som går fra en vinkelspids til den modstående side, sådan at den *halverer vinklen.*

Højden der går fra en vinkelspids *vinkelret* på den modstående side. Hvis trekanten er stumpvinklet,[1] kan højden ligge uden for trekanten.

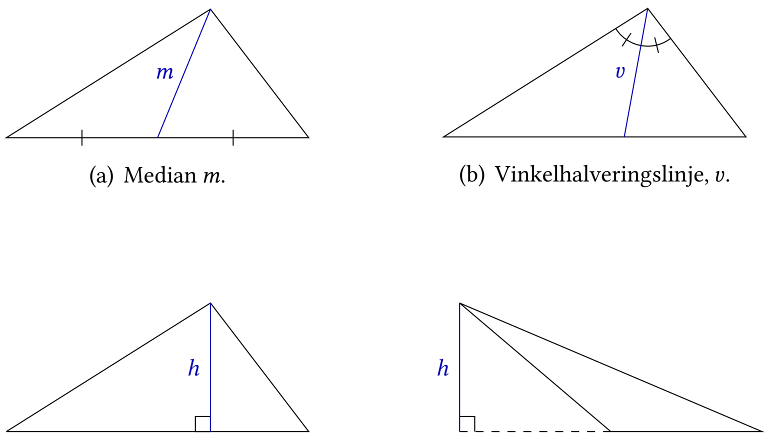
[1] En trekant kaldes *stumpvinklet* hvis en af vinklerne er stump, dvs. større end 90°.

Disse tre typer af linjer er illustreret på figur 1.1.

En højde står som sagt vinkelret på den modstående side. Den side som højden står vinkelret på, kalder man *grundlinjen*,[2] og den kan bruges sammen med højden til at beregne en trekants areal.

[2] Da en trekant har tre højder, så er der derfor heller ikke én grundlinje. Hvilken side man vælger at kalde grundlinje, afhænger af hvilken højde man vælger at se på.

Der gælder følgende meget kendte sætning om sammenhængen mellem en trekants areal, dens højde og grundlinje:



(a) Median m.

(b) Vinkelhalveringslinje, v.

(c) Højde, h.

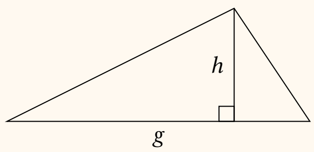
(d) Højde der falder uden for trekanten.

Figur 1.1: Hvert hjørne i en trekant har tilknyttet en median, en vinkelhalveringslinje og en højde. Bemærk at en højde kan ligge uden for trekanten.

Sætning 1.2

Arealet T af en trekant er det halve af en af højderne ganget med den længden af den tilhørende grundlinje:

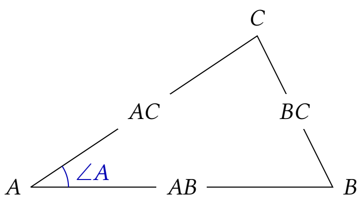
$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g \ .$$



1.2 Notation

Når man skal tale om siderne og vinklerne i en trekant, er det vigtigt at man har en notation som entydigt forklarer hvad man taler om.

Man følger den konvention der er illustreret på figur 1.2: Den vinkel der ligger ved punktet A, kaldes $\angle A$ osv., og siderne benævnes ved de punkter de går mellem.

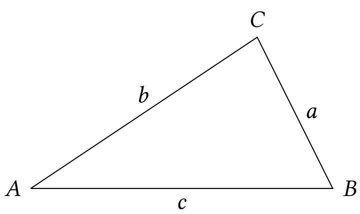


Figur 1.2: Sider og vinkler i $\triangle ABC$.

Nogle gange benævner man også sidernes længder ud fra det punkt de ligger *overfor*. Længden af siden over for punkt A benævnes så med a osv., sådan at

$$a = |BC| \ , \quad b = |AC| \ , \quad c = |AB| \ .$$

Dette ses på figur 1.3.



Figur 1.3: $\triangle ABC$ hvor sidelængderne benævnes a, b og c.

Notationen hvor man bruger små bogstaver som navne til sidelængderne, duer i princippet kun hvis man har én trekant at kigge på. Hvis man har en mere kompliceret figur med flere punkter end tre, kan der nemlig være flere sider der kan siges at ligge over for et bestemt punkt – notationen med små bogstaver bliver da ikke længere entydig. I den situation vil det være fornuftigst skrive sidelængderne som $|AB|$, $|BC|$ osv.

Hvis man har en figur med mere end tre punkter, kan der også nogle gange opstå en situation hvor det ikke er entydigt at benævne en vinkel med ét bogstav, f.eks. $\angle A$. I disse situationer benævner man i stedet en vinkel vha.

3 bogstaver. $\angle CAD$ er f.eks. den vinkel man får tegnet op når man tegner fra punkt C til punkt A til punkt D (se figur 1.4).

1.3 Ensvinklede trekanter

To trekanter hvor vinklerne er parvis lige store, kaldes *ensvinklede*, dvs.

Definition 1.3

Hvis der for to trekanter ABC og $A'B'C'$ gælder at

$$\angle A' = \angle A, \quad \angle B' = \angle B \quad \text{og} \quad \angle C' = \angle C\ ,$$

så kaldes de to trekanter *ensvinklede*.

Hvis to trekanter er ensvinklede, vil den ene være en forstørret eller formindsket kopi af den anden. Der gælder følgende sætning.

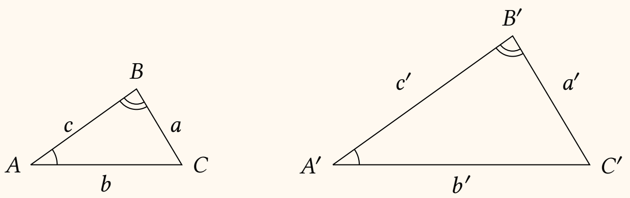
Sætning 1.4

Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle A'B'C'$ er ensvinklede med

$$\angle A' = \angle A, \quad \angle B' = \angle B \quad \text{og} \quad \angle C' = \angle C\ ,$$

så er forholdet mellem længderne af de ensliggende[3] sider ens, dvs.

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}\ .$$

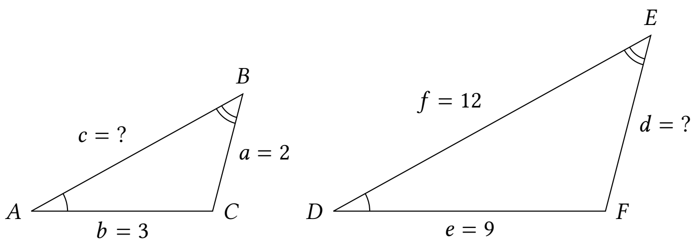


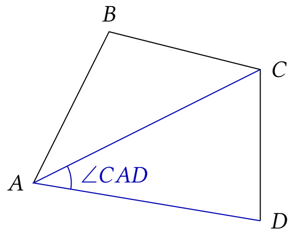
Eksempel 1.5 Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er ensvinklede, sådan at

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \text{og} \angle C = \angle F\ ,$$

og man tillige ved at $a = 2$, $b = 3$, $e = 9$ og $f = 12$, så kan man beregne de resterende sidelængder.

Først tegner man en skitse (den behøver ikke være målfast) for at få et overblik:





Figur 1.4: $\angle A$ kan være 3 forskellige vinkler på denne figur; derfor kalder man den markerede vinkel $\angle CAD$.

[3] To sider er *ensliggende* når de ligger mellem to ens vinkler.

Herefter ser man på forholdet mellem de ensliggende siders længder. I dette tilfælde er

$$\frac{d}{a} = \frac{e}{b} = \frac{f}{c} \;.$$

Indsætter man de kendte værdier, får man

$$\frac{d}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{c} \;.$$

Dvs.

$$\frac{d}{2} = \frac{9}{3} \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{9}{3} \cdot 2 = 6 \;,$$

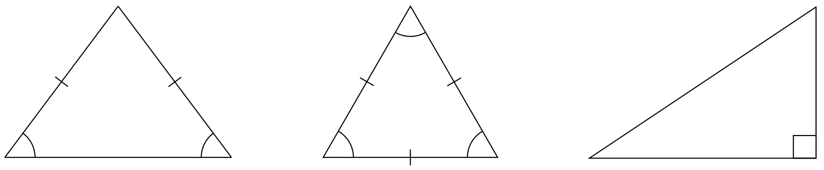
og

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{12} = \frac{3}{9} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{3}{9} \cdot 12 = 4 \;.$$

Nu kender man altså alle sidelængderne i de to trekanter.

1.4 Retvinklede trekanter

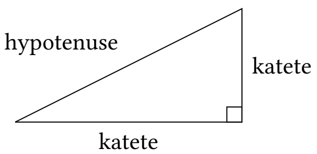
Der findes tre typer af trekanter som det er vigtigt at kende navnene på. Det er *ligebenede* trekanter, *ligesidede* trekanter og *retvinklede* trekanter. Disse er illustreret på figur 1.5.



(a) En ligebenet trekant (b) En ligesidet trekant. (c) En retvinklet trekant.

Figur 1.5: I en ligebenet trekant er to af siderne lige lange, i en ligesidet er alle sider lige lange, og i en retvinklet trekant er den ene vinkel ret.

I en retvinklet trekant har siderne også specielle navne. Den side der ligger over for den rette vinkel, kaldes *hypotenusen*, mens de to andre sider kaldes *kateter* (se figur 1.6).



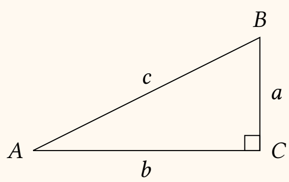
Figur 1.6: Siderne i en retvinklet trekant.

For retvinklede trekanter gælder der følgende sætning:

Sætning 1.6: Pythagoras' sætning

I en retvinklet trekant ABC hvor $\angle C$ er den rette vinkel, gælder der at

$$a^2 + b^2 = c^2 \;.$$



Hvis man i stedet for at referere til en konkret trekant ABC bruger de navne siderne i en retvinklet trekant har, kan Pythagoras' sætning også udtrykkes på følgende måde:

Sætning 1.7: Pythagoras' sætning

I en retvinklet trekant er summen af kvadraterne på kateterne lig kvadratet på hypotenusen,[4] dvs.

$$(\text{første katete})^2 + (\text{anden katete})^2 = (\text{hypotenusen})^2 \ .$$

[4] *Kvadratet på ...* betyder »opløftet i 2. potens«. *Kvadratet på a* betyder f.eks. a^2.

Eksempel 1.8 Hvis man om en retvinklet trekant ved at den ene katete har længden 5, og hypotenusen har længden 13, kan man beregne længden af den sidste katete vha. Pythagoras' sætning.

Længden af den sidste katete kan man kalde x. Sætter man de oplyste værdier ind i Pythagoras' sætning, får man ligningen

$$5^2 + x^2 = 13^2 \ .$$

Dvs.

$$x^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \ .$$

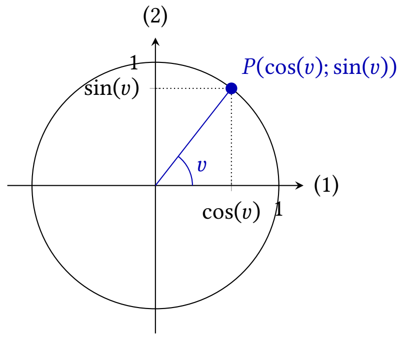
Længden af den sidste katete er så

$$x = \sqrt{144} = 12 \ .$$

1.5 Sinus, cosinus og tangens

Hvis man skal kunne beregne manglende sider og vinkler i en trekant, er det nødvendigt at finde sammenhænge mellem sider og vinkler i trekanter. Her viser det sig, at det er praktisk at definere de tre *trigonometriske* funktioner sinus, cosinus og tangens.

På figur 1.7 er der tegnet et koordinatsystem med en *enhedscirkel*, dvs. en cirkel med centrum i $(0, 0)$ og radius 1. Vinklen v, hvis ene ben ligger langs førsteaksen, og hvis andet ben skærer cirklen i punktet P er også indtegnet. Punktet P kalder man vinklens *retningspunkt*. Vinkler afsættes altid på enhedscirklen på den måde, at man starter på førsteaksen og derefter går mod uret (positiv omløbsretning). Hvis vinklen er negativ, går man dog med uret rundt.



Figur 1.7: Sinus og cosinus til en vinkel aflæses vha. enhedscirklen.

De tre funktioner defineres nu på følgende måde:

Definition 1.9

Lad P være retningspunktet for vinklen v. Så er

1. $\cos(v)$ lig med P's førstekoordinat.
2. $\sin(v)$ lig med P's andenkoordinat.
3. $\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$.

Bemærk, at $\tan(v)$ kun er defineret for de vinkler, hvor $\cos(v) \neq 0$.

Vha. disse funktioner bliver det nu muligt at omregne mellem længder og vinkler, idet v jo er en vinkel, mens $\cos(v)$ og $\sin(v)$ er koordinater, dvs. en form for længder.

Tabel 1.8: Værdien af $\cos(v)$ og $\sin(v)$ for forskellige vinkler.

v	$\cos(v)$	$\sin(v)$
20°	0,940	0,342
45°	0,707	0,707
60°	0,5	0,866
90°	1	0
100°	−0,174	0,985

I tabel 1.8 kan man se nogle værdier af cosinus og sinus. Af tabellen kan man f.eks. se, at $\cos(60^\circ) = 0{,}5$ og $\sin(60^\circ) = 0{,}866$. Det betyder, at hvis vinklen v på figur 1.7 er 60°, så har punktet P koordinaterne $(0.5, 0.866)$.

Af figur 1.7 kan man også se at hvis vinklen v ligger mellem 90° og 180° er $\cos(v)$ negativ. Dette ses også i tabellen.

Da $\sin(v)$ og $\cos(v)$ er koordinater til et punkt på enhedscirklen, som jo har radius 1, følger det i øvrigt at både $\sin(v)$ og $\cos(v)$ må ligge mellem -1 og 1, altså at

$$-1 \leq \cos(v) \leq 1 \qquad \text{og} \qquad -1 \leq \sin(v) \leq 1 \,.$$

Ved at se på symmetri i enhedscirklen, kan man udlede følgende sætning der ikke bevises:

Sætning 1.10

Hvis v er en vinkel, så er

1. $\cos(90^\circ - v) = \sin(v)$
2. $\sin(90^\circ - v) = \cos(v)$
3. $\cos(-v) = \cos(v)$
4. $\sin(-v) = -\sin(v)$
5. $\cos(180^\circ - v) = -\cos(v)$
6. $\sin(180^\circ - v) = \sin(v)$

Idet radius i enhedscirklen er 1, gælder der også følgende sammenhæng mellem cosinus og sinus som kan udledes ved at anvende Pythagoras' sætning på enhedscirklen:

Sætning 1.11: Grundrelationen mellem cosinus og sinus

Lad v være en vinkel. Så er

$$\cos(v)^2 + \sin(v)^2 = 1 \,.$$

1.6 Trigonometri i retvinklede trekanter

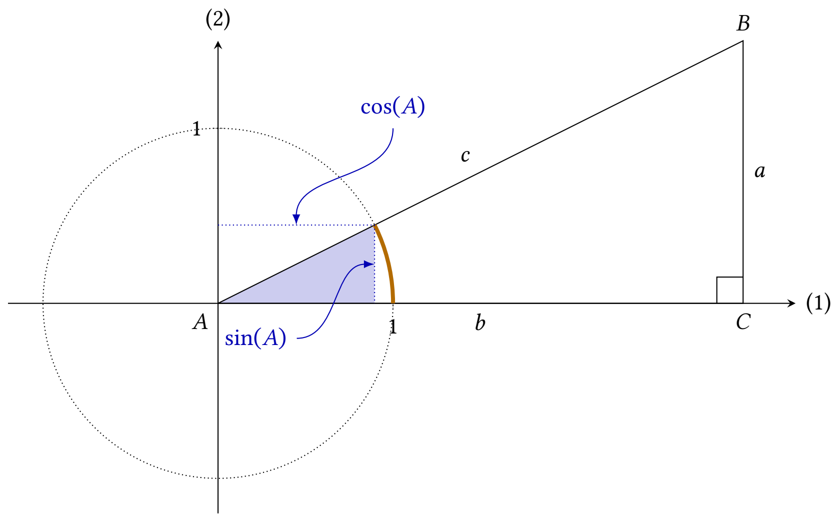
I første omgang ses på hvordan de trigonometriske funktioner kan bruges til beregninger i en retvinklet trekant.

På figur 1.9 er en retvinklet trekant tegnet ind i et koordinatsystem. Samtidig er der tegnet en enhedscirkel hvor $\angle A$ også ligger placeret.

Man kan nu finde $\cos(A)$ og $\sin(A)$ som sidelængder i den lille markerede trekant. De findes som den lodrette, hhv. vandrette, afstand man ser på figur 1.9 (jf. definition 1.9). $\tan(A)$ er hældningskoefficienten til linjen AB på figuren.

Den udfyldte trekant er ensvinklet med $\triangle ABC$. Hypotenusen i den lille trekant er 1 idet den er radius i cirklen. Idet hypotenusen i trekant ABC er c, kan man altså beregne sidelængderne i den lille trekant ved at dele sidelængderne i trekant ABC med c.[5]

[5] De to trekanter er ensvinklede, og hypotenuserne er hhv. 1 og c. Dvs. $\triangle ABC$ er c gange så stor, som den lille trekant; omvendt er den lille trekant altså c gange mindre end $\triangle ABC$.



Figur 1.9: En retvinklet trekant hvor vinklen A er lagt i $(0,0)$ i et koordinatsystem. $\sin(A)$ og $\cos(A)$ kan findes som længder i den lille markerede trekant der er ensvinklet med trekant ABC.

Da den lodrette katete i den lille trekant er $\sin(A)$, og den lodrette katete i $\triangle ABC$ er a, må der derfor gælde at

$$\sin(A) = \frac{a}{c} .$$

I den lille trekant er den vandrette katete $\cos(A)$, og i $\triangle ABC$ er den vandrette katete lig b. Derfor må

$$\cos(A) = \frac{b}{c} .$$

Ud fra dette kan man også finde en formel for $\tan(A)$ idet

$$\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{a}{c} \Big/ \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} .$$

Alt dette kan opsummeres i følgende sætning:

Sætning 1.12

I en retvinklet trekant ABC, hvor C er den rette vinkel er

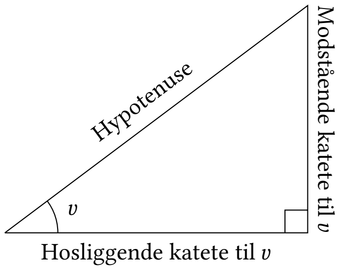
$$\sin(A) = \frac{a}{c} , \quad \cos(A) = \frac{b}{c} \quad \text{og} \quad \tan(A) = \frac{a}{b} .$$

Nu er det jo ikke alle trekanter der hedder ABC. Sætning 1.12 skrives derfor også nogle gange op på følgende måde:

Sætning 1.13

I en retvinklet trekant hvor v er én af de spidse vinkler, er

$$\begin{aligned} \sin(v) &= \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}} , \\ \cos(v) &= \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}} , \\ \tan(v) &= \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}} . \end{aligned}$$

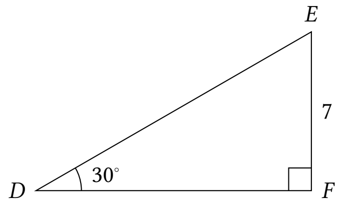


Figur 1.10: Sidernes navne i forhold til den spidse vinkel v.

Betegnelserne »modstående« og »hosliggende« katete henviser til om kateten ligger over for (modstående) eller op til (hosliggende) vinklen. Se også figur 1.10.

Vha. formlerne i sætning 1.13 er det muligt at beregne alle sider og vinkler i en retvinklet trekant hvis blot man kender mindst én side og enten en af de spidse vinkler eller en side mere.

Eksempel 1.14 I en retvinklet trekant DEF er $\angle D = 30^\circ$ og $|EF| = 7$. En skitse af trekanten ser således ud:



Siden EF er den modstående katete til $\angle D$, og DE er hypotenusen, så ifølge sætning 1.13 er

$$\sin(30^\circ) = \frac{7}{|DE|} \ .$$

Denne ligning løses, og man får

$$|DE| = \frac{7}{\sin(30^\circ)} = 14 \ .$$

Den sidste side kan nu bestemmes vha. Pythagoras' sætning, og den sidste vinkel bestemmes ud fra at vinkelsummen i en trekant er 180°.

Eksempel 1.15 Hvis man skal bestemme længden af kateten DF i trekanten fra eksempel 1.14, kan dette gøres ved at benytte tangens.

Siden DF er den hosliggende katete til $\angle D$, og EF er den modstående. Man får så ifølge sætning 1.13 at

$$\tan(30^\circ) = \frac{7}{|DF|} \ .$$

Løser man denne ligning, får man

$$|DF| = \frac{7}{\tan(30^\circ)} = 12{,}1 \ .$$

1.7 Inverse trigonometriske funktioner

I afsnit 1.6 blev det gennemgået hvordan man kan beregne siderne i en retvinklet trekant ud fra sinus, cosinus og tangens. I dette afsnit ses til gengæld på hvordan man finder en vinkel hvis man kender dens sinus, cosinus eller tangens.

Til dette bruger man de »inverse trigonometriske funktioner« $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ og $\tan^{-1}$.[6] De tre funktioner bruges til at løse ligninger, hvor man kender sinus, cosinus eller tangens til den ubekendte.

[6] De tre funktioner kaldes undertiden også arccos, arcsin og arctan. »arc« står for *arcus*, som betyder »bue« på latin. arcsin er altså den bue (vinkel), hvis sinus har en bestemt værdi.

I computerprogrammer kaldes de tre funktioner i øvrigt ofte asin, acos og atan.

Eksempel 1.16 For at løse ligningen $\cos(v) = 0{,}8$ bruges $\cos^{-1}$:

$$\cos(v) = 0{,}8 \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \cos^{-1}(0{,}8) \ .$$

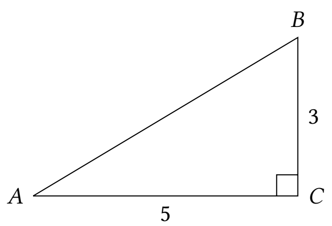
$\cos^{-1}(0{,}8)$ regnes ud på en lommeregner, og man får

$$v = \cos^{-1}(0{,}8) = 36{,}9^\circ \ .$$

Eksempel 1.17 Ligningen $\sin(B) = 0{,}5$ løses således:

$$\sin(B) = 0{,}5 \qquad \Leftrightarrow \qquad B = \sin^{-1}(0{,}5) = 30^\circ \ .$$

Eksempel 1.18 I en retvinklet trekant ABC er $|AC| = 5$ og $|BC| = 3$. En skitse af trekanten ser således ud:



Siden AC er den hosliggende katete til $\angle A$, og siden BC er den modstående katete. Ifølge sætning 1.13 er

$$\tan(A) = \frac{3}{5} = 0{,}6 \ .$$

Løsningen til ligningen $\tan(A) = 0{,}6$ finder man ved at benytte $\tan^{-1}$, så

$$\tan(A) = 0{,}6 \qquad \Leftrightarrow \qquad A = \tan^{-1}(0{,}6) = 30{,}96^\circ \ .$$

Den sidste vinkel kan så bestemmes ud fra at vinkelsummen skal give 180°, og den sidste side kan bestemmes vha. Pythagoras' sætning.

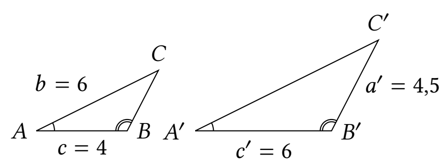
1.8 Øvelser

Øvelse 1.1
Bestem arealet af trekanten PQR, når $|PQ| = 6$ og $h_R = 3$.

Øvelse 1.2
Arealet af trekant ABC er 28, og $h_C = 7$.

a) Beregn $|AB|$.

Øvelse 1.3
De to trekanter på figuren er ensvinklede.

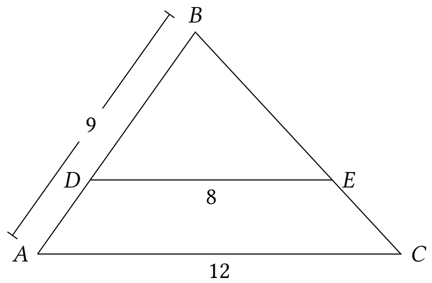


a) Bestem sidelængderne a og b'.

Øvelse 1.4
De to trekanter ABC og DEF er ensvinklede, således at $\angle A = \angle D$ og $\angle B = \angle E$. Der gælder yderligere, at $a = 5$, $b = 7$, $e = 15$ og $f = 18$.

a) Bestem de manglende sidelængder.

Øvelse 1.5
På figuren nedenfor er AC og DE parallelle. Nogle af målene er angivet på figuren.



a) Bestem $|AD|$.

Øvelse 1.6
Trekant ABC er retvinklet, og $\angle C$ er den rette vinkel.

a) Bestem c, når $a = 3$ og $b = 4$.
b) Bestem a, når $b = 5$ og $c = 13$.

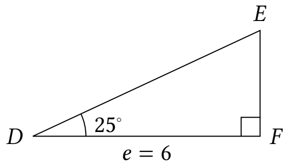
Øvelse 1.7
Trekant BLT er retvinklet, og $\angle L$ er den rette vinkel.

a) Opskriv Pythagoras' sætning for denne trekant.
b) Bestem b, når $l = 4{,}3$ og $t = 2{,}9$.

Øvelse 1.8
Trekant ABC er retvinklet, og C er den rette vinkel. Tegn en skitse af trekanten, og bestem de manglende sidelængder når

a) $\angle A = 30^\circ$, $c = 7$
b) $\angle B = 40^\circ$, $b = 5$
c) $\angle B = 51^\circ$, $c = 1$
d) $\angle A = 12^\circ$, $b = 9{,}6$

Øvelse 1.9
Den retvinklede trekant DEF er afbildet nedenfor. Nogle af trekantens mål kan ses på figuren.



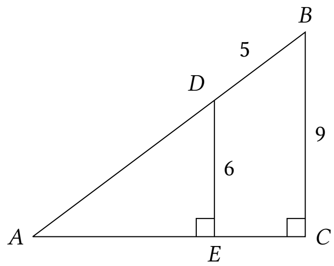
a) Bestem den manglende vinkel og de manglende sidelængder i trekant DEF.
b) Bestem trekantens areal.

Øvelse 1.10
Trekant ABC er retvinklet, og C er den rette vinkel. Tegn en skitse af trekanten, og bestem de manglende vinkler når

a) $b = 7$, $c = 10$
b) $a = 3$, $b = 4$
c) $a = 5$, $c = 8$
d) $b = 3$, $c = 17$

Øvelse 1.11
Bestem de manglende vinkler samt længden af den sidste katete i en retvinklet trekant hvor længden af den ene katete er 3, og længden af hypotenusen er 7.

Øvelse 1.12
På figuren nedenfor er $|DE| = 6$, $|BC| = 9$ og $|BD| = 5$.



a) Bestem $|AD|$ og $|AE|$.
b) Bestem $\angle A$ og $\angle B$.

2 Vilkårlige trekanter

I det foregående kapitler blev der fundet en masse sammenhænge der gælder i *retvinklede trekanter*, men de fleste trekanter er ikke retvinklede. I dette kapitel anvendes trigonometrien derfor til at udlede nogle sætninger om vilkårlige trekanter, dvs. trekanter der kan have alle mulige vinkler, og altså ikke nødvendigvis er retvinklede. Først ses på en trekants areal.

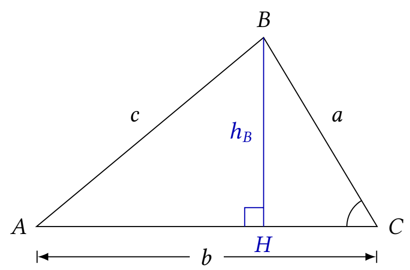
2.1 Arealet af en trekant

Vha. sætning 1.2 kan man beregne en trekants areal hvis man kender en højde og en grundlinje i trekanten. Det viser sig at man ikke behøver kende en højde hvis man i stedet kender længden af to sider og den mellemliggende vinkel.

Sætning 2.1

Arealet T af en trekant ABC er

$$T = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)\ ,$$
$$T = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(B)\ ,$$
$$T = \tfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A)\ .$$



Figur 2.1: Trekant ABC med højden h_B indtegnet. Vinkel C er spids.

Bevis

I første omgang antages, at vinklen C er spids. I $\triangle ABC$ tegnes højden h_B fra B (se figur 2.1). Iflg. sætning 1.2 er arealet af $\triangle ABC$ givet ved

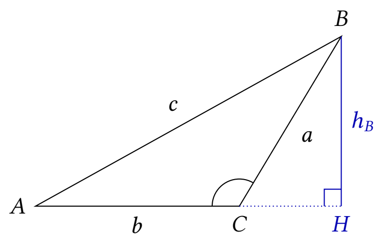
$$T = \tfrac{1}{2} \cdot h_B \cdot b\,. \tag{2.1}$$

Men da $\triangle BCH$ er retvinklet gælder der også (sætning 1.13), at

$$\sin(C) = \frac{h_B}{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad h_B = a \cdot \sin(C)\ .$$

Dette udtryk for h_B kan sættes ind i ligningen (2.1), og man får så

$$T = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot \sin(C) \cdot b = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)\ .$$



Figur 2.2: Trekant ABC med højden h_B indtegnet. Vinkel C er stump.

Hvis vinkel C er stump, ser situationen ud som på figur 2.2. Her gælder, at

$$\angle BCH = 180^\circ - \angle C\ .$$

Ifølge sætning 1.10 betyder det, at

$$\sin(\angle BCH) = \sin(180^\circ - C) = \sin(C)\ .$$

Ser man på den retvinklede $\triangle BCH$, finder man, at

$$\sin(\angle BCH) = \frac{h_B}{a} \ ,$$

dvs. lige som i det spidsvinklede tilfælde er

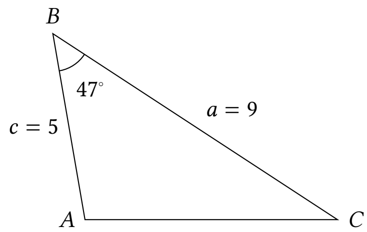
$$\sin(C) = \frac{h_B}{a} \ ,$$

og man ender derfor med den samme formel. ■

Dette er kun et bevis for den ene af formlerne i sætning 2.1. Men hvis man ser nærmere på formlerne i sætningen, opdager man, at der i alle tre formler optræder to sider og den *mellemliggende* vinkel.

Det er derfor ikke nødvendigt, at give et selvstændigt bevis for alle tre formler, idet det faktisk drejer sig om den samme formel skrevet på tre forskellige måder. Hvis man blot husker, at der i formlen indgår to af siderne og den mellemliggende vinkel, kan man hurtigt skrive arealformlen op for en hvilken som helst trekant.

Eksempel 2.2 I $\triangle ABC$ er $\angle B = 47^\circ$, $a = 9$ og $c = 5$. En skitse af trekanten ser sådan ud:



Arealet af denne trekant er

$$T = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(B) = \tfrac{1}{2} \cdot 9 \cdot 5 \cdot \sin(47^\circ) = 16{,}5 \ .$$

Eksempel 2.3 I $\triangle DEF$ er $d = 4$ og $\angle E = 75^\circ$. Hvis man yderligere får at vide, at arealet af trekanten er 13, så kan man beregne siden f og derved få tegnet en skitse af trekanten.

Først bemærker man, at de sider, der støder op til $\angle E$ er siderne d og f. Derfor kan man vha. sætning 2.1 opstille formlen

$$T = \tfrac{1}{2} \cdot d \cdot f \cdot \sin(E) \ .$$

Sætter man de kendte størrelser ind i formlen, får man ligningen

$$13 = \tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot f \cdot \sin(75^\circ) \ .$$

Denne ligning har løsningen

$$f = \frac{2 \cdot 13}{4 \cdot \sin(75^\circ)} = 6{,}7 \ .$$

Siden f har altså længden 6,7.

2.2 Sinusrelationerne

Vha. sætning 2.1 kan man udlede følgende sætning.

Sætning 2.4: Sinusrelationerne

I en trekant ABC gælder der

$$\frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle C)}{c} \ ,$$

og

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} \ .$$

Bevis

De tre formler i sætning 2.1 er tre formler for arealet af den samme trekant. Der må derfor gælde, at

$$\tfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\angle A) = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\angle B) = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\angle C) \ .$$

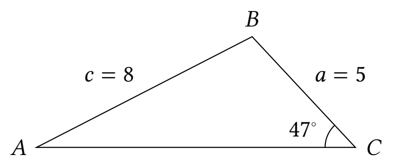
I denne dobbeltligning kan man dividere med $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c$ på alle »sider«, og man får så

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\angle A)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\angle B)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\angle C)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c} \ .$$

Nu forkorter man så meget som muligt, og tilbage står der

$$\frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle C)}{c}$$

hvorved sætningen er bevist. ■



Figur 2.3: En trekant med to kendte sider og én kendt vinkel.

Sinusrelationerne siger at forholdet mellem sinus til en vinkel og længden af den side der ligger over for vinklen, er konstant i en given trekant. Hvis man kender en vinkel og en længden af siden overfor i en trekant, og man kender en vinkel eller en sidelængde mere, er det derfor muligt at beregne resten af sidelængderne og vinklerne i trekanten.

Eksempel 2.5 I $\triangle ABC$ er $\angle C = 47^\circ$, $a = 5$ og $c = 8$. En skitse af trekanten kan ses på figur 2.3.

Iflg. sinusrelationerne (sætning 2.4) er

$$\frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{\sin(\angle C)}{c} \ ,$$

dvs.

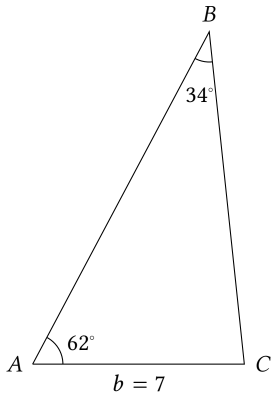
$$\frac{\sin(\angle A)}{5} = \frac{\sin(47^\circ)}{8} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(\angle A) = \frac{\sin(47^\circ)}{8} \cdot 5 = 0{,}4571 \ .$$

Derfor er

$$\angle A = \sin^{-1}(0{,}4571) = 27{,}2^\circ \ .$$

Vinklen $\angle B$ kan nu bestemmes ud fra at vinkelsummen er 180°, og den sidste side kan så også bestemmes vha. sinusrelationerne (se evt. næste eksempel).

Eksempel 2.6 I $\triangle ABC$ er $\angle A = 62^\circ$, $\angle B = 34^\circ$ og $b = 7$. En skitse kan ses på figur 2.4.



Figur 2.4: En trekant med to kendte vinkler og én kendt side.

Ifølge sinusrelationerne er

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} \,,$$

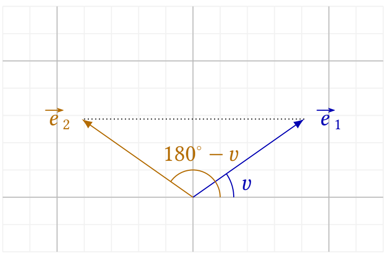
dvs.

$$\frac{a}{\sin(62^\circ)} = \frac{7}{\sin(34^\circ)} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = \frac{7}{\sin(34^\circ)} \cdot \sin(62^\circ) = 11{,}1 \,.$$

Den sidste vinkel kan beregnes ud fra at vinkelsummen er 180°, og den sidste side kan bestemmes på samme måde som siden a.

Sinusfælden

Det viser sig at man skal være en smule påpasselig når man bestemmer vinkler vha. sinusrelationerne. Funktionen $\sin^{-1}$ som man bruger til at isolere vinkler med, giver nemlig altid et resultat mellem -90° og 90°; men i en trekant kan en vinkel være op til 180° – og det viser sig at for en given sinus-værdi findes der to vinkler der kan give denne værdi.



Figur 2.5: To vinkler med samme sinus.

Figur 2.5 viser enhedsvektoren $\vec{e}_1$ med retningsvinkel v og enhedsvektoren $\vec{e}_2$ med retningsvinkel $180^\circ - v$. Figuren viser at de to enhedsvektorer har samme andenkoordinat, dvs.

$$\sin(180^\circ - v) = \sin(v) \,.$$

Ud fra dette kan man argumentere for at når man har ligningen $\sin(v) = y$, så kan der være to løsninger. De to løsninger er

$$v = \sin^{-1}(y) \qquad \text{og} \qquad v = 180^\circ - \sin^{-1}(y) \,.$$

Eksempel 2.7 I trekant ABC er $\angle A = 56^\circ$, $a = 7$ og $b = 8$. Vha. sinusrelationerne kan man beregne $\angle B$ idet

$$\frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle A)}{a} \,.$$

Dette giver ligningen

$$\frac{\sin(\angle B)}{8} = \frac{\sin(56^\circ)}{7} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(\angle B) = \frac{\sin(56^\circ)}{7} \cdot 8 = 0{,}9475 \,.$$

Denne ligning har to løsninger, den ene er[1]

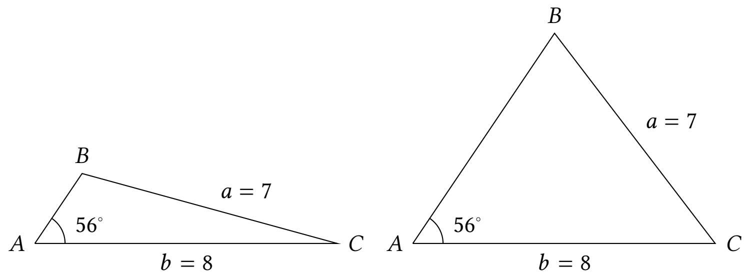
$$\angle B = \sin^{-1}(0{,}9475) = 71{,}3^\circ \,,$$

og den anden er

$$\angle B = 180^\circ - \sin^{-1}(0{,}9475) = 108{,}7^\circ \,.$$

Trekant ABC kan altså se ud på to forskellige måder:

[1]Der findes to løsninger til en ligning som $\sin(\angle B) = 0{,}9475$, netop fordi $\sin(71{,}3^\circ) = \sin(108{,}7^\circ)$ så begge disse vinkler løser ligningen.



Hvis man bliver bedt om at bestemme de resterende sider og vinkler i $\triangle ABC$ bliver man altså nødt til at regne på to forskellige trekanter. Der findes derfor ikke én men to løsninger, og den ene er ikke mere rigtig end den anden.

Selvom ligningen $\sin(v) = y$ altid har to løsninger, er det ikke sikkert at begge løsninger giver mening. Dette ses i næste eksempel.

Eksempel 2.8 Her ses på trekanten ABC, hvor $\angle A = 45^\circ$, $a = 15$ og $b = 12$. Sinusrelationerne giver

$$\frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle A)}{a}$$

hvorfra man får ligningen

$$\frac{\sin(\angle B)}{12} = \frac{\sin(45^\circ)}{15} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(\angle B) = \frac{\sin(45^\circ)}{15} \cdot 12 = 0{,}5657\ .$$

Denne ligning har to løsninger,

$$\angle B = \sin^{-1}(0{,}5657) = 34{,}4^\circ$$

og

$$\angle B = 180^\circ - \sin^{-1}(0{,}5657) = 145{,}6^\circ\ .$$

Den sidste løsning ($\angle B = 145{,}6^\circ$) er godt nok en løsning til ligningen $\sin(\angle B) = 0{,}5657$, men det er ikke en løsning der giver mening. Vinkelsummen i en trekant er nemlig 180°, og der er i forvejen en vinkel på 45°. Så kan der ikke også være en vinkel på $145{,}6^\circ$ i trekanten, og denne løsning kasseres derfor.

Altså er der kun én mulig størrelse vinklen kan have, nemlig $\angle B = 34{,}4^\circ$.

2.3 Cosinusrelationerne

Sinusrelationerne kan bruges i de tilfælde hvor man kender en vinkel og en side der ligger over for hinanden. Gør man ikke det, kan man kun beregne yderligere sidelængder og vinkler ved at benytte *cosinusrelationerne*.

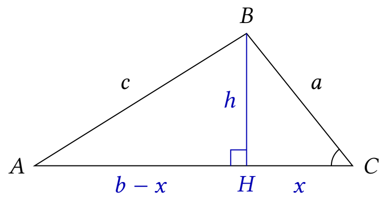
Sætning 2.9: Cosinusrelationerne

I en trekant ABC gælder der at

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\angle A) & \cos(\angle A) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\angle B) & \cos(\angle B) &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\angle C) & \cos(\angle C) &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \ . \end{aligned}$$

Formlerne på højre side i sætning 2.9 er blot en omskrivning af formlerne på venstre side.

Hvis man ser nærmere på formlerne på venstre side, bemærker man at alle tre formler gør det muligt at beregne en sidelængde hvis man kender vinklen overfor og længden af de to andre sider. Indholdet i alle tre formler er altså på sin vis det samme, så det er kun nødvendigt at bevise den ene af dem.



Figur 2.6: Trekant ABC med højden h. Vinkel C er spids.

Bevis
I første omgang antages det, at vinkel C er spids. I trekanten ABC tegnes højden h fra B. Fodpunktet for højden kaldes H (se figur 2.6).

Bruger man Pythagoras' sætning på de retvinklede trekanter ABH og BCH, får man

$$c^2 = h^2 + (b - x)^2 \qquad \text{og} \qquad a^2 = h^2 + x^2 \ .$$

I begge disse ligninger kan man isolere h^2, så man får

$$c^2 - (b - x)^2 = h^2 \qquad \text{og} \qquad a^2 - x^2 = h^2 \ .$$

Nu har man to udtryk, der begge er lig h^2. Disse to udtryk må derfor også være lig hinanden, dvs.

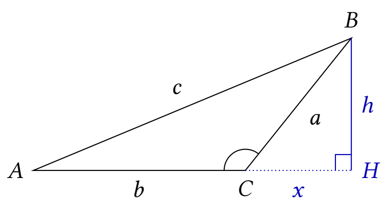
$$\begin{aligned} c^2 - (b - x)^2 &= a^2 - x^2 & \Leftrightarrow \\ c^2 &= a^2 - x^2 + (b - x)^2 & \Leftrightarrow \\ c^2 &= a^2 - x^2 + b^2 + x^2 - 2 \cdot b \cdot x & \Leftrightarrow \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x \ . \end{aligned} \tag{2.2}$$

For at komme videre, udnytter man, at $\triangle BCH$ er retvinklet, og derfor giver sætning 1.13, at

$$\cos(C) = \frac{x}{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = a \cdot \cos(C) \ .$$

Dette resultat kan indsættes i ligningen (2.2), og man får

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot a \cdot \cos(C) \ .$$



Figur 2.7: Trekant ABC med højden h. Vinkel C er stump.

Hvis vinkel C er stump, ser situationen ud som på figur 2.7. Her kan man bruge Pythagoras' sætning på de to retvinklede trekanter ABH og BCH, og man får

$$c^2 = h^2 + (b + x)^2 \qquad \text{og} \qquad a^2 = h^2 + x^2 \ .$$

Regner man på disse to ligninger på samme måde som i det spidsvinklede tilfælde, får man

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot b \cdot x \,, \qquad (2.3)$$

som adskiller sig fra (2.2), idet der er et andet fortegn på det sidste led.

Ser man på trekant BCH finder man nu, at

$$\cos(\angle BCH) = \frac{x}{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = a \cdot \cos(\angle BCH) \,.$$

Men $\angle BCH = 180^\circ - \angle C$, dvs. sætning 1.10 giver

$$\cos(\angle BCH) = \cos(180^\circ - C) = -\cos(C) \,,$$

og dvs.

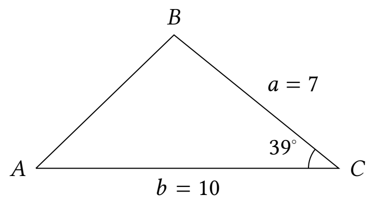
$$x = a \cdot \cos(\angle BCH) = -a \cdot \cos(C) \,.$$

Indsætter man dette i (2.3) får man igen

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C) \,. \qquad \blacksquare$$

Cosinusrelationerne kan bruges til at beregne en længde af en side hvis man kender de to andre sidelængder i en trekant samt vinklen overfor. Dette svarer til formlerne på venstre side i sætning 2.9.

Alternativt kan man bruge cosinusrelationerne til at beregne en vinkel hvis man kender længden af alle tre sider i en trekant – dette svarer til formlerne på højre side i sætningen.



Figur 2.8: Trekant hvor man kender to sider og en mellemliggende vinkel.

Eksempel 2.10 I trekant ABC er $\angle C = 39^\circ$, $a = 7$ og $b = 10$. En skitse af trekanten kan ses på figur 2.8.

Sidelængden c kan beregnes vha. en cosinusrelation. Iflg. sætning 2.9 er

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\angle C) = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos(39^\circ) = 40{,}20$$

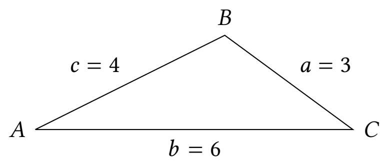
hvilket betyder at

$$c = \sqrt{40{,}20} = 6{,}3 \,.$$

Da man nu kender længden af alle siderne, kan én af de sidste to vinkler også bestemmes vha. en cosinusrelation (se næste eksempel). Alternativt kan man bestemme en af de sidste to vinkler vha. sinusrelationerne.

Eksempel 2.11 I dette eksempel ses på en trekant ABC, hvor $a = 3$, $b = 6$ og $c = 4$ (se figur 2.9). Iflg. cosinusrelationerne kan $\angle A$ beregnes ud fra formlen

$$\cos(\angle A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6^2 + 4^2 - 3^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = 0{,}8958 \,.$$



Figur 2.9: Trekant, hvor man kender alle sider.

Heraf får man

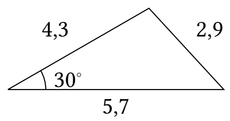
$$\angle A = \cos^{-1}(0{,}8958) = 26{,}4^\circ \,.$$

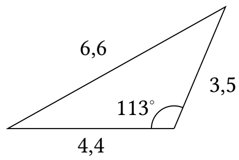
De resterende vinkler kan beregnes på samme måde.

2.4 Øvelser

Øvelse 2.1
Bestem arealet af trekant ABC når $a = 3$, $b = 5$ og $\angle C = 72^\circ$.

Øvelse 2.2
Bestem arealerne af trekanterne herunder.





Øvelse 2.3
I trekant ABC er $\angle A = 26^\circ$, $\angle B = 95^\circ$ og $|BC| = 4{,}0$.

a) Bestem de manglende sider og den manglende vinkel i trekanten.

b) Bestem arealet af trekanten.

Øvelse 2.4
Bestem de manglende størrelser i trekant ABC i de fire tilfælde herunder. Husk i hvert tilfælde at overveje om der er mere end én løsning.

a) $\angle A = 34^\circ$, $a = 10$, $b = 5$.

b) $\angle B = 69^\circ$, $\angle C = 71^\circ$, $a = 4{,}7$.

c) $\angle B = 106^\circ$, $b = 5$, $c = 6{,}2$.

d) $\angle A = 62^\circ$, $\angle B = 79^\circ$, $c = 8{,}3$.

Øvelse 2.5
I trekant ABC er $\angle A = 32^\circ$, $c = 4{,}7$, og medianen fra B har længden $m_B = 6{,}1$.

a) Bestem b.

b) Bestem trekantens areal.

Øvelse 2.6
Bestem de manglende vinkler og sider i trekant ABC i de fire tilfælde herunder.

a) $a = 5$, $b = 7$, $\angle C = 49^\circ$.

b) $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$.

c) $b = 4$, $c = 7$, $\angle A = 112^\circ$.

d) $a = 9$, $b = 5$, $c = 7$.

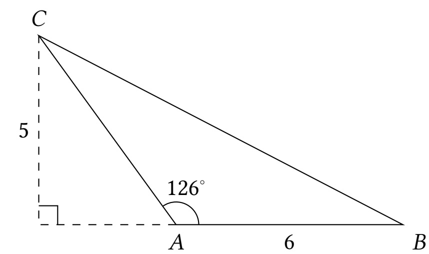
Øvelse 2.7
Trekant ABC har sidelængderne $a = 7{,}2$, $b = 6{,}3$ og $c = 4{,}5$.

a) Bestem vinklerne i trekanten.

b) Bestem trekantens areal.

c) Bestem højden h_C fra C på siden AB.

Øvelse 2.8
I trekant ABC er $\angle A = 126^\circ$, $|AB| = 6$ og højden fra C er $h_C = 5$.



a) Bestem trekantens areal.

b) Bestem længden af AC.

c) Bestem $|BC|$ samt $\angle B$ og $\angle C$.

Analytisk geometri

3

Analytisk geometri er en disciplin i matematikken hvor man beskriver geometriske objekter ved hjælp af punkter og ligninger. Dette gør man ved at lægge objekterne i et koordinatsystem og herefter beskrive dem vha. x- og y-koordinater.

En trekant kan f.eks. beskrives vha. de tre punkter der udgør trekantens hjørner. Hvis en trekant lægges i et koordinatsystem, vil hver af de tre punkter således have et koordinatsæt, og herudfra kan alt andet i trekanten beregnes.

Hvis man skal lave en sådan beregning, er det nyttigt at kunne bestemme afstanden mellem to punkter i et koordinatsystem. Der gælder følgende sætning:

Sætning 3.1

Afstanden mellem punkterne $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ er

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ .$$

Sætningen kan bevises ved at betragte linjen AB som hypotenusen i en retvinklet trekant, og derefter anvende Pythagoras' sætning.

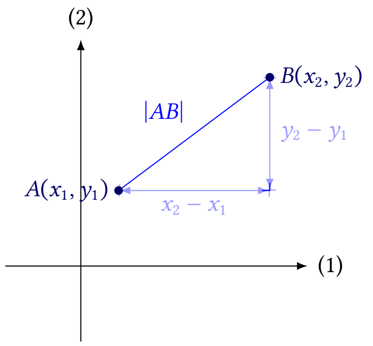
Bevis
Figur 3.1 viser de to punkter $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ indtegnet i et koordinatsystem. Tegner man som på figuren en retvinklet trekant hvor AB er hypotenusen, vil længden af den vandrette katete være $x_2 - x_1$, og længden af den lodrette katete være $y_2 - y_1$.

Ifølge Pythagoras' sætning vil der derfor gælde at

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \ ,$$

dvs.

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ . \qquad \blacksquare$$



Figur 3.1: Afstanden mellem to punkter kan findes vha. Pythagoras' sætning.

Vha. formlen i sætning 3.1 kan man f.eks. beregne sidelængderne i en trekant hvis man kender koordinaterne til trekantens hjørner.

Eksempel 3.2 Trekanten ABC ligger i et koordinatsystem, således at punkterne har koordinaterne $A(2, -1)$, $B(8, 9)$ og $C(-3, 4)$, se figur 3.2.

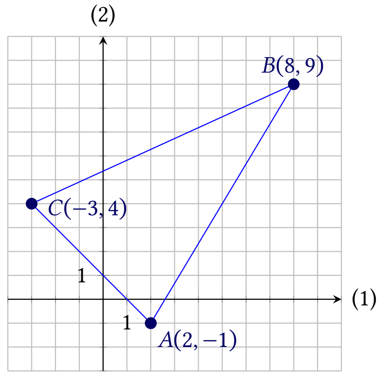
Længden af siden AB er så

$$|AB| = \sqrt{(8-2)^2 + (9-(-1))^2} = \sqrt{6^2 + 10^2} = 11{,}7\ ,$$

og siden AC har længden

$$|AC| = \sqrt{(-3-2)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 7{,}1\ .$$

På samme måde kan man finde længden af den sidste side, og vha. cosinusrelationerne kan man så beregne vinklerne.



Figur 3.2: En trekant med hjørner i punkterne A, B og C.

3.1 Rette linjer

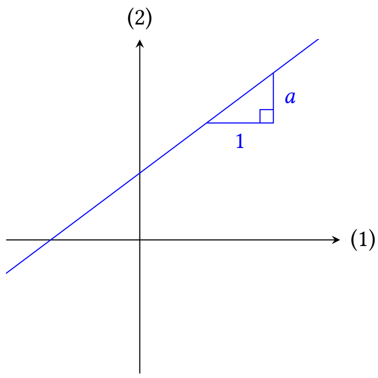
En af de simpleste geometriske figurer er den velkendte rette linjer. I dette afsnit opsummeres nogle af den rette linjes kendte egenskaber.

Sætning 3.3

En ret linje der ikke er lodret, kan beskrives med ligningen

$$y = ax + b\ ,$$

hvor a kaldes linjens *hældningskoefficient*, og b er skæringen med andenaksen.



Figur 3.3: Aflæsning af en ret linjes hældningskoefficient.

Hældningskoefficienten a beskriver som bekendt hvor stejl linjen er, således at linjens andenkoordinat vokser med a hver gang førstekoordinaten vokser med 1. Man kan derfor aflæse hældningskoefficienten ved at tegne en retvinklet trekant som på figur 3.3.

Hvis man kender to punkter på den rette linje, kan man også beregne hældningskoefficienten med en velkendt formel.

Sætning 3.4

Den rette linje der går gennem de to punkter $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ har hældningskoefficienten

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ .$$

Når man skal bestemme en ret linjes ligning ud fra to punkter, kender man sjældent skæringen med andenaksen (tallet b i linjens ligning). Det kan derfor være praktisk at kende linjens ligning på en anden form der er praktisk i forbindelse med beregninger.

Sætning 3.5

En ret linje med hældningskoefficient a som går gennem punktet (x_0, y_0), har ligningen

$$y = a(x - x_0) + y_0\ .$$

Eksempel 3.6 Hvis en ret linje går gennem de to punkter $P(1, -2)$ og $Q(5, 10)$, kan man beregne hældningskoefficienten vha. sætning 3.4:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - (-2)}{5 - 1} = \frac{12}{4} = 3 \; .$$

Herefter kan linjens ligning skrives op ved brug af sætning 3.5, hvor (x_0, y_0) er en af de to givne punkter P og Q. Her vælges P:

$$y = a(x - x_1) + y_1 = 3(x - 1) + (-2)$$

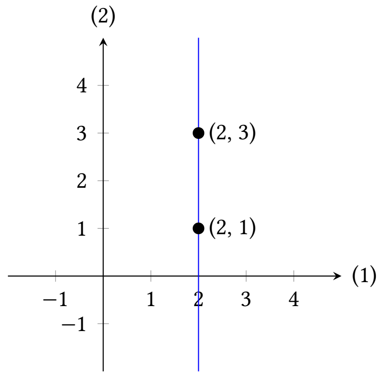
Efterfølgende kan dette reduceres til

$$y = 3x - 5 \; .$$

Lodrette linjer

En lodret linje er kendetegnet ved at alle punkter på linjen har samme førstekoordinat, et eksempel kan ses på figur 3.4. Idet alle punkterne på linjen på figur 3.4 har førstekoordinaten 2, kan de beskrives med ligningen

$$x = 2 \; .$$



Figur 3.4: En lodret linje i et koordinatsystem.

Generelt gælder der altså at

> **Sætning 3.7**
>
> En lodret linje i et koordinatsystem kan beskrives med ligningen
>
> $$x = c \; ,$$
>
> hvor c er førstekoordinaten til punkterne på linjen.

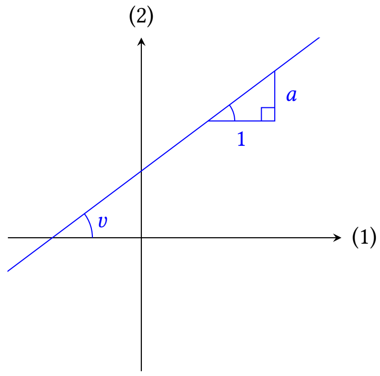
Hvis man kender to punkter på en linje, og de to punkter har samme førstekoordinat, ved man altså at linjen er lodret.

Eksempel 3.8 En ret linje går gennem de to punkter $(4, 7)$ og $(4, 19)$. De to punkter har samme førstekoordinat, derfor er der tale om en lodret linje med ligningen

$$x = 4 \; .$$

3.2 Hældningsvinkel

Hældningskoefficienten er et mål for hvor stejl en ret linje er. Et andet mål for hvor stejl en linje er, er den såkaldte *hældningsvinkel* som er den vinkel linjen danner med førsteaksen. Hældningsvinklen v for linjen med ligningen $y = ax + b$ kan ses markeret på figur 3.5. Bemærk at hældningsvinklen ligger mod den positive side af førsteaksen, dvs. mod højre.



Figur 3.5: En ret linjes hældningsvinkel v.

Hældningsvinklen kan også findes i den lille retvinklede trekant på figuren. I denne trekant har den modstående katete til v længden a, og den hosliggende har længden 1. Sætning 1.13 giver derfor at

$$\tan(v) = \frac{a}{1} = a \; .$$

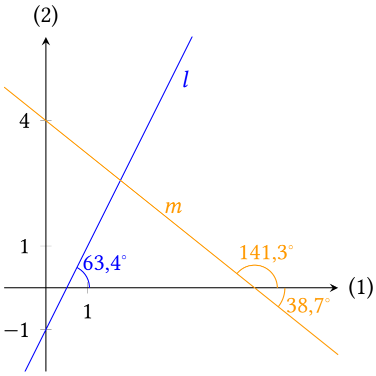
Hvis $\tan(v) = a$, må der derfor også gælde at

$$v = \tan^{-1}(a) .$$

Sætning 3.9

Hvis den rette linje med ligningen $y = ax + b$ har hældningsvinklen v, er

$$v = \tan^{-1}(a) .$$



Figur 3.6: To rette linjer og deres hældningsvinkler.

Eksempel 3.10 Den rette linje l med ligningen $y = 2x - 1$ har en hældningsvinkel på

$$v_l = \tan^{-1}(2) = 63{,}4^\circ ,$$

og den rette linje m med ligningen $y = -0{,}8x + 4$ har en hældningsvinkel på

$$v_m = \tan^{-1}(-0{,}8) = -38{,}7^\circ .$$

At hældningsvinklen for m bliver negativ, betyder at vinklen ligger under førsteaksen (se figur 3.6). Er man interesseret i vinklen over førsteaksen, kan denne beregnes som

$$180^\circ + v_m = 180^\circ + (-31{,}7^\circ) = 141{,}3^\circ .$$

Man kan naturligvis også beregne hældningskoefficienten ud fra hældningsvinklen.

Eksempel 3.11 Den rette linje med ligningen $y = ax + b$ har en hældningsvinkel på 61°. Dens hældningskoefficient er så

$$a = \tan(61^\circ) = 1{,}8 .$$

Vil man bestemme hele linjens ligning, kræver det at man også kender et punkt på linjen; man kan så anvende sætning 3.5 til at bestemme ligningen.

3.3 Ortogonale linjer

Hvis to linjer er parallelle, har de samme hældning. Men hvordan ser det ud hvis de to linjer er *ortogonale*, dvs. står vinkelret på hinanden? Her viser det sig at der gælder en bestemt sammenhæng mellem de to linjers hældningskoefficienter.

Sætning 3.12

Hvis de to rette linjer med ligningerne $y = ax + b$ og $y = cx + d$ er ortogonale, så er

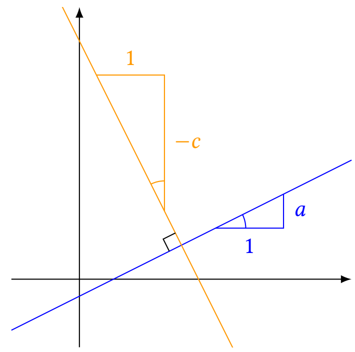
$$a \cdot c = -1 .$$

Bevis
Hvis de to linjer med ligningerne

$$y = ax + b$$

$$y = cx + d$$

står vinkelret på hinanden, vil den ene af linjerne have negativ hældning. Man kan derfor antage at $c < 0$. Figur 3.7 viser en skitse af de to linjer.



Figur 3.7: To ortonale, rette linjer.

De to trekanter på figuren er tegnet ud fra linjernes hældninger, a og c. Den ene trekant har sidelængderne 1 og $-c$ netop fordi $c < 0$, dvs. $-c$ er den positive længde af siden i denne trekant.

Fordi de to linjer står vinkelret på hinanden, er de to indtegnede trekanter ensvinklede. Forholdet mellem ensliggende sider er derfor ens, dvs.

$$\frac{1}{a} = \frac{-c}{1} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = a \cdot (-c) \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot c = -1 \, ,$$

og sætningen er hermed bevist. ■

Eksempel 3.13 En linje l har ligningen

$$l : \ \ y = -2x + 5 \, .$$

Linjen m står vinkelret på l og går gennem punktet $(4, 9)$.

Hældningskoefficienten for l er -2, og da m står vinkelret på l, må m's hældning a derfor opfylde at

$$a \cdot (-2) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \tfrac{1}{2} \, .$$

Man ved nu at m har hældning $a = \frac{1}{2}$ og går gennem $(4, 9)$, dvs. ligningen for m er

$$y = \tfrac{1}{2}(x - 4) + 9$$

som reduceres til

$$y = \tfrac{1}{2}x + 7 \, .$$

3.4 Afstanden fra et punkt til en linje

Det viser sig at der findes en simpel formel til at beregne afstanden fra et givet punkt til en given linje.[1] Der gælder følgende:

[1]Når man taler om afstanden fra et punkt til en linje, mener man den *korteste* afstand.

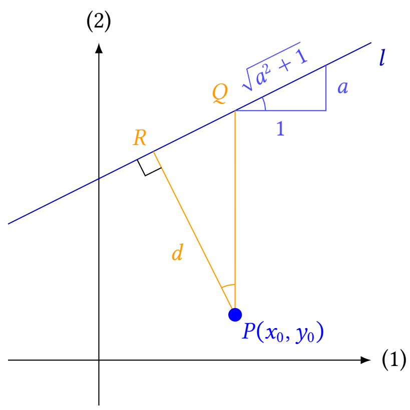
Sætning 3.14

Afstanden fra punktet $P(x_0, y_0)$ til linjen l med ligningen $y = ax + b$ er givet ved

$$\operatorname{dist}(P, l) = \frac{|a \cdot x_0 + b - y_0|}{\sqrt{a^2 + 1}} \, .$$

Bevis

Figur 3.8 viser en skitse af linjen l og punktet P. Man tegner nu en trekant PQR, sådan at siden PR går fra punktet P vinkelret ind på linjen l, og punktet Q ligger på linjen lodret over punktet P.



Figur 3.8: Afstanden fra punktet P til linjen l er lig med d.

Længden af siden PR er så den korteste afstand fra punktet P til linjen l. Punktet Q har samme førstekoordinat som P da de to punkter ligger lodret over hinanden. Dvs. Q har førstekoordinat x_0, og idet Q ligger på linjen kan man beregne Q's andenkoordinat ved at sætte x_0 ind i linjens ligning. Q har derfor koordinaterne

$$Q(x_0, a \cdot x_0 + b) \; .$$

Afstanden $|PQ|$ svarer til forskellen i andenkoordinaterne for $P(x_0, y_0)$ og $Q(x_0, a \cdot x_0 + b)$, dvs.[2]

[2] Tallet $a \cdot x_0 - y_0$ bliver negativt hvis punktet P ligger over linjen, derfor tages den absolutte værdi.

$$|PQ| = |a \cdot x_0 + b - y_0| \; .$$

Ud over trekant PQR er der også tegnet en »hældningstrekant« på figuren. Denne trekant har kateterne 1 og a, så ifølge Pythagoras' sætning er hypotenusens længde $\sqrt{a^2+1}$. Man kan se at denne trekant er ensvinklet med PQR, dvs. forholdet mellem ensliggende sider er det samme. Det giver at

$$\frac{d}{1} = \frac{|PQ|}{\sqrt{a^2+1}} \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{|a \cdot x_0 + b - y_0|}{\sqrt{a^2+1}} \; .$$

Da d netop er lig afstanden fra punktet til linjen, er sætningen hermed vist. ■

Eksempel 3.15 Linjen l har ligningen $y = -3x + 6$ og punktet P er givet ved $P(1, 8)$. Afstanden fra P til l er så

$$\operatorname{dist}(P, l) = \frac{|-3 \cdot 1 + 6 - 8|}{\sqrt{(-3)^2 + 1}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = 1{,}58 \; .$$

Formlen kan også bruges til at bestemme afstanden mellem parallelle linjer.

Eksempel 3.16 De to linjer l og m har ligningerne

$$\begin{aligned} l &: \quad y = 2x + 9 \\ m &: \quad y = 2x - 3 \; . \end{aligned}$$

Ligningen for l viser at linjen skærer andenaksen i punktet $P(0, 9)$. Afstanden mellem de to linjer er derfor det samme som afstanden fra P til m:

$$\operatorname{dist}(P, m) = \frac{|2 \cdot 0 - 3 - 9|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{|-12|}{\sqrt{5}} = 5{,}37 \; .$$

Afstanden mellem de to parallelle linjer l og m er derfor 5,37.

Det giver naturligvis kun mening at finde afstanden mellem parallelle linjer, idet to linjer der ikke er parallelle, vil skære hinanden.

3.5 Øvelser

Øvelse 3.1
Bestem afstanden mellem punkterne

a) $A(1,7)$ og $B(5{,}4)$ b) $P(-2,6)$ og $Q(7,1)$

Øvelse 3.2
Bestem siden BC i trekanten i eksempel 3.2, og bestem vinklerne i trekanten.

Øvelse 3.3
Bestem ligningen for den rette linje der går gennem de to punkter

a) $A(1,5)$ og $B(8,19)$
b) $P(-3,7)$ og $Q(4{,}0)$

Øvelse 3.4
Bestem hældningsvinklerne for den rette linje med ligningen

a) $y = 2{,}5x - 7$
b) $y = -x + 4$
c) $y = \frac{1}{3}x + 45$

Øvelse 3.5
Den rette linje l har en hældningsvinkel på 149° og går gennem punktet $(3,2)$.

a) Bestem en ligning for linjen.

Øvelse 3.6
Bestem i hvert tilfælde herunder, om de givne linjer er ortogonale-

a) $y = -2x + 7$ og $y = 0{,}5x - 1$
b) $y = 4x - 10$ og $y = 0{,}25x + 3$
c) $y = 5x - 2$ og $y = -0{,}3x - 9$
d) $y = -3x + 12$ og $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

Øvelse 3.7
Linjen l har ligningen

$$l: \quad y = -6x + 4 \,.$$

Linjen m står vinkelret på l og går gennem punktet $(1,5)$.

a) Bestem en ligning for m.

Øvelse 3.8
Linjen m står vinkelret på linjen l der er givet ved ligningen

$$l: \quad y = 4x - 5 \,.$$

a) Bestem hældningskoeffienten for m.

Linjen m går gennem punktet $(0,15)$.

b) Bestem en ligning for m.
c) Bestem skæringspunktet mellem m og l.

Øvelse 3.9
Bestem afstanden fra punktet P til linjen l når

a) $P(4,5)$ og $l: \; y = 0{,}75x + 0{,}5$
b) $P(-1,0)$ og $l: \; y = -2{,}6x + 4{,}8$
c) $P(9,2)$ og $l: \; y = 2{,}5x - 3$

Øvelse 3.10
Linjen l har ligningen

$$y = \frac{3}{4}x + 1 \,.$$

a) Bestem et punkt P sådan at $\mathrm{dist}(P,l) = 8$.
b) Bestem ligningerne for de to linjer der er parallelle med l og har afstanden 8 til l.

Cirkler 4

Hvis man vil tegne en cirkel, begynder man med at vælge et punkt (kaldet centrum). Man tegner så en cirkel ved at føre blyanten gennem alle de punkter der har den samme afstand til centrum – denne afstand kaldes som bekendt radius. Vil man opstille en ligning for en cirkel, handler det altså om at beskrive alle de punkter der har samme afstand til cirklens centrum. Dette fører til følgende sætning:

Sætning 4.1

Cirklen med centrum i $C(x_0, y_0)$ og radius r har ligningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \ .$$

Bevis
Cirklen består af alle de punkter $P(x, y)$, som har afstanden r til centrum, dvs. $|CP| = r$. Men ifølge sætning 3.1 er

$$|CP| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \ ,$$

dvs.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= r && \Leftrightarrow \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2 \ . \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Eksempel 4.2 Cirklen med radius $r = 5$ og centrum i $C(4, -1)$ har ligningen

$$\begin{aligned} (x - 4)^2 + (y - (-1))^2 &= 5^2 && \Leftrightarrow \\ (x - 4)^2 + (y + 1)^2 &= 25 \ . \end{aligned}$$

Ligningen kan reduceres yderligere ved at gange parenteserne ud. Man får så

$$\begin{aligned} x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + y^2 + 1^2 + 2 \cdot y \cdot 1 &= 25 && \Leftrightarrow \\ x^2 + 16 - 8x + y^2 + 1 + 2y &= 25 && \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Eksempel 4.3 Ligningen

$$x^2 + y^2 - 6x + 14y + 42 = 0$$

er ligningen for en cirkel. Hvis man vil finde centrum og radius for cirklen, bliver man nødt til at skrive ligningen om så den får samme form som ligningen i sætning 4.1.

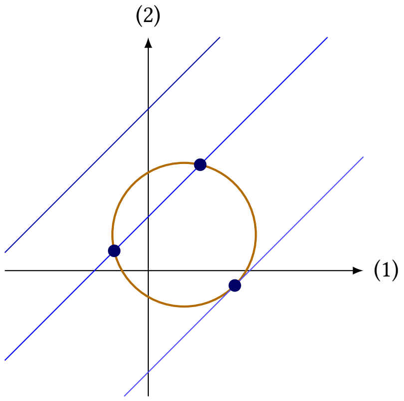
For at gøre det skal leddene x^2 og $-6x$ skrives om til kvadratet på en toleddet størrelse. Det samme gælder for y^2 og $14y$. Hvis x^2 og $-6x$ kommer af kvadratet på en toleddet størrelse, så er $-6x$ det dobbelte produkt. Det giver derfor mening at beregne

$$(x-3)^2 = x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3 = x^2 + 9 - 6x \ ,$$

Her kan man se at $x^2 - 6x$ kan omskrives til $(x-3)^2 - 9$. På samme måde kan man vise at $y^2 + 14y = (y+7)^2 - 49$. Derfor kan cirklens ligning omskrives på følgende måde

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 14y + 42 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ x^2 - 6x + y^2 + 14y + 42 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ (x-3)^2 - 9 + (y+7)^2 - 49 + 42 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ (x-3)^2 + (y+7)^2 = 16 \quad &\Leftrightarrow \\ (x-3)^2 + (y-(-7))^2 = 4^2 \ . \end{aligned}$$

Når ligningen nu står på denne form, kan man direkte aflæse at radius er $r = 4$, og centrum er $C(3, -7)$.



Figur 4.1: En linje kan skære en cirkel 0, 1 eller 2 steder.

4.1 Skæringspunkter mellem cirkler og linjer

En cirkel og en linje kan have 0, 1 eller 2 skæringspunkter, se figur 4.1. Hvis cirklen og linjen har præcist ét punkt fælles, er linjen en tangent til cirklen. Hvor mange skæringspunkter der er mellem cirklen og linjen, kan man finde ud af ved at bestemme afstanden mellem cirklens centrum og linjen. Hvis afstanden fra centrum til linjen er præcis lig med radius, så er linjen en tangent. Hvis afstanden er mindre end radius, er der to skæringspunkter, og hvis afstanden er større end radius, er der ingen skæringspunkter mellem cirklen og linjen.

Eksempel 4.4 Her bestemmes det om der er skæringspunkter mellem linjen med ligningen

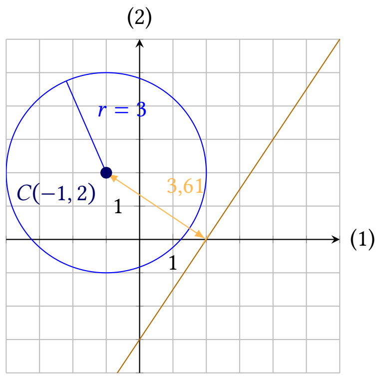
$$y = 1{,}5x - 3$$

og cirklen med ligningen

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 \ .$$

Cirklens centrum er $C(-1, 2)$ og dens radius er $r = \sqrt{9} = 3$. Afstanden fra centrum til l er

$$\operatorname{dist}(C, l) = \frac{|1{,}5 \cdot (-1) - 3 - 2|}{\sqrt{1{,}5^2 + 1}} = \frac{|-6{,}5|}{\sqrt{3{,}25}} = \frac{6{,}5}{\sqrt{3{,}25}} = 3{,}61 \ .$$



Figur 4.2: Afstanden fra centrum til linjen er større end radius.

Da afstanden fra centrum til linjen er større end radius, har linjen og cirklen ingen skæringspunkter (se figur 4.2).

Eksempel 4.5 Linjen med ligningen

$$x + 2$$

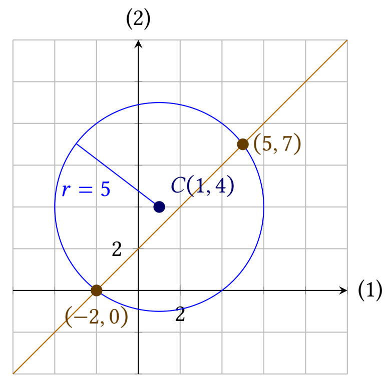
og cirklen med ligningen

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 25$$

har to skæringspunkter. Det ses af at afstanden fra cirklens centrum $C(1,4)$ til linjen er

$$\mathrm{dist}(C,l) = \frac{|1+2-4|}{\sqrt{1^2+1}} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$$

som er mindre end cirklens radius $r = \sqrt{25} = 5$ (se figur 4.3).



Figur 4.3: Afstanden fra centrum til linjen er mindre end radius.

Eksempel 4.6 Linjen og cirklen i eksempel 4.5 skærer hinanden to steder. Her bestemmes de to skæringspunkter (se figur 4.3).

Linjens ligning er $y = x + 2$. Denne værdi for y sættes ind i cirklens ligning som bliver til

$$(x-1)^2 + (x+2-4)^2 = 25\ .$$

Dette er en andengradsligning. Man kan løse den vha. et CAS-værktøj hvorved man får

$$x = -2 \quad \vee \quad x = 5\ .$$

De to skæringspunkter har disse værdier af x. Værdien af y kan beregnes ud fra linjens ligning:

$$\begin{aligned} x = -2 :&\quad y = -2 + 2 = 0 \\ x = 5 :&\quad y = 5 + 2 = 7\ . \end{aligned}$$

Linjen skærer altså cirklen i de to punkter $(-2,0)$ og $(5,7)$.

4.2 Cirkeltangenter

En tangent til en cirkel er en linje der kun har ét punkt fælles med cirklen. Dette punkt kaldes *røringspunktet*. Derudover vil en tangent til en cirkel altid stå vinkelret på linjen gennem centrum og røringspunktet.

Som omtalt ovenfor kan man bestemme om en given linje er en tangent ved at beregne afstanden fra linjen til cirklens centrum. Afstanden fra centrum til en tangent er nemlig lig med radius.

I de følgende eksempler vises hvordan man kan *konstruere* bestemte tangenter hvis man kender enten et punkt eller en hældning.

Eksempel 4.7 Punktet $P(5,-7)$ ligger på cirklen givet ved ligningen

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25\ .$$

Her bestemmes en ligning til den tangent til cirklen der har dette punkt som røringspunkt.

Cirklens centrum er $C(2,-3)$. Den søgte tangent står vinkelret på linjestykket CP, og hældningskoefficienten for dette linjestykke er

$$a_{CP} = \frac{-7-(-3)}{5-2} = -\tfrac{4}{3}\ .$$

Tangenten er en ret linje med ligning $y = ax + b$. Idet tangenten står vinkelret på CP, giver sætning 3.12 at

$$a \cdot a_{CP} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \left(-\tfrac{4}{3}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \tfrac{3}{4}\ .$$

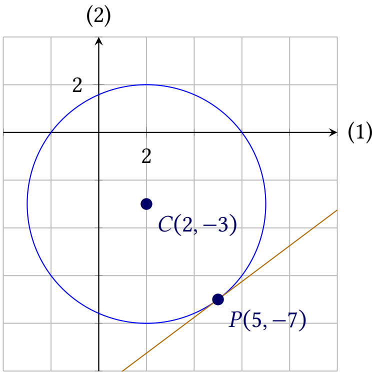
Tangenten har altså hældningen $a = \frac{3}{4}$, og den går gennem punktet $P(5,-7)$. Dvs. tangenten har ligningen (se sætning 3.5)

$$y = \tfrac{3}{4}(x-5) + (-7)$$

som kan reduceres til

$$y = \tfrac{3}{4}x - \tfrac{43}{4}\ .$$

Cirklen og tangenten kan ses på figur 4.4.



Figur 4.4: Cirklens tangent gennem det givne punkt $P(5,-7)$.

Eksempel 4.8 Her bestemmes røringspunkterne for de tangenter til cirklen

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

der er parallelle med linjen l med ligningen

$$l\ :\ y = \tfrac{4}{3}x + 10\ .$$

Cirklen må have to tangenter der er parallelle med den givne linje. En linje gennem de to røringspunkter må gå gennem centrum og stå vinkelret på linjen l. Idet den står vinkelret på l, kan man finde dens hældning vha. sætning 3.12:

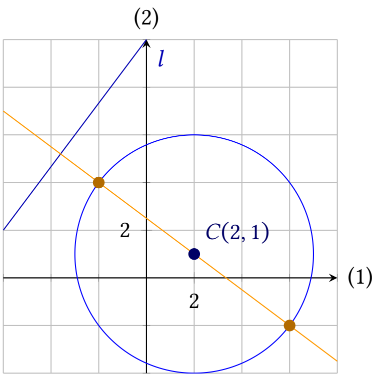
$$a \cdot \tfrac{4}{3} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\tfrac{3}{4}\ .$$

Man ved at linjen gennem røringspunkterne går gennem centrum $C(2,1)$. Dette punkt giver sammen med hældningen at denne linje har ligningen

$$y = -\tfrac{3}{4}(x-2) + 1 = -\tfrac{3}{4}x + \tfrac{5}{2}\ .$$

Skæringspunkterne mellem denne linje og cirklen vil være de søgte røringspunkter (se figur 4.5). Disse skæringspunkter kan bestemmes på samme måde som i eksempel 4.5 ved at sætte $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ ind på y's plads i cirklens ligning:

$$(x-2)^2 + \left(-\tfrac{3}{4}x + \tfrac{5}{2} - 1\right)^2 = 25$$



Figur 4.5: Røringspunkterne for de cirkeltangenter der er parallelle med linjen l.

Igen er der tale om en andengradsligning. Denne kan løses vha. et CAS-værktøj, og man finder de to løsninger:

$$x = -2 \quad \vee \quad x = 6\ .$$

De to værdier af parameteren x kan nu sættes ind linjens ligning, og man får

$$\begin{aligned} x = -2: \quad y &= -\tfrac{3}{4}\cdot(-2) + \tfrac{5}{2} = 4 \\ x = 6: \quad y &= -\tfrac{3}{4}\cdot 6 + \tfrac{5}{2} = -2 \; . \end{aligned}$$

De to tangenter der er parallelle med l, rører altså cirklen i punkterne $(-2, 4)$ og $(6, -2)$. Hvis man vil finde ligningerne for tangenterne, kan dette gøres vha. sætning 3.5 idet tangenternes hældning er den samme som hældningen af l.

4.3 Øvelser

Øvelse 4.1
Opstil en ligning for cirklen med centrum i C og radius r, når

a) $C(1, 4)$ og $r = 2$
b) $C(0, 6)$ og $r = 7$
c) $C(-3, 7)$ og $r = 1$

Øvelse 4.2
Bestem centrum og radius for cirklerne givet ved følgende ligninger:

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 23$
b) $x^2 + y^2 + 2x = 24$
c) $x^2 + y^2 + 8x + 4y = 61$

Øvelse 4.3
Bestem antallet af skæringspunkter mellem linjen l givet ved ligningen

$$l: \quad y = \tfrac{1}{2}x + 3$$

og cirklen givet ved ligningen

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 16 \; .$$

Øvelse 4.4
Bestem skæringspunkterne mellem linjen l givet ved ligningen

$$l: \quad y = -x + 6$$

og cirklen givet ved ligningen

$$(x-3)^2 + (x-2)^2 = 13 \; .$$

Øvelse 4.5
Bestem skæringspunkterne mellem linjen l givet ved ligningen

$$l: \quad y = -3x + 6$$

og cirklen givet ved ligningen

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 25 \; .$$

Øvelse 4.6
Cirklen med ligningen

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

går gennem de tre punkter $A(-2, 6)$, $B(2, 8)$ og $C(7, 3)$.

a) Bestem en ligning for tangenten til cirklen i hver af disse punkter.

Øvelse 4.7
Cirklen med ligningen

$$(x-5)^2 + (y+1)^2 = 169 \; ,$$

har to tangenter der er parallelle med linjen med ligningen

$$y = 2{,}4x - 2 \; .$$

a) Bestem røringspunkterne for disse tangenter.
b) Bestem en ligning for hver af tangenterne.