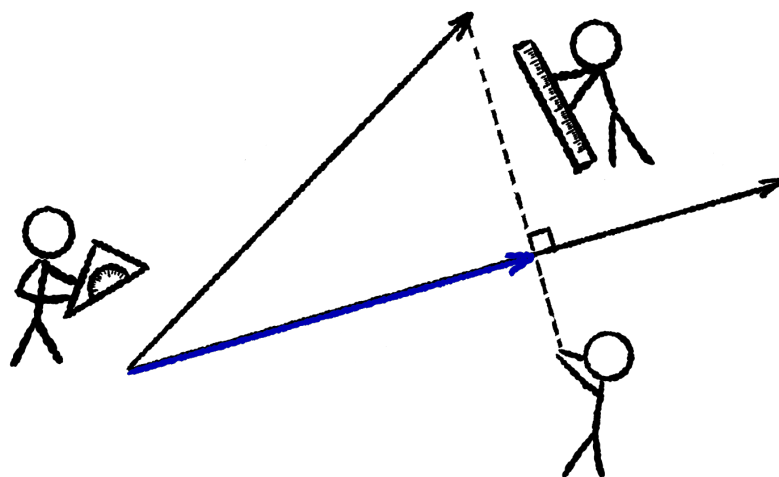


# Geometri i planen

---

Version 1.5  
14. januar 2022




## Geometri i planen

Version 1.5, 2022

Disse noter dækker kernestoffet i plangeometri på stx A- og B-niveau efter gymnasireformen 2017.

Al geometrien tager udgangspunkt i vektorer i planen; således indføres f.eks. de trigonometriske funktioner uden henvisning til enhedscirklen, men udelukkende ud fra vinkler i forbindelse med vektorer.

Enkelte grafer/figurer er markeret med symbolet  der fungerer som link til et interaktivt GeoGebra-arbejdsark. Se også [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org).

Disse noter er skrevet til matematikundervisning på stx og må frit anvendes til ikke-kommercielle formål.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet  $\LaTeX$ , se [www.tug.org](http://www.tug.org) og [www.miktex.org](http://www.miktex.org). Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se [www.ctan.org/pkg/pgf](http://www.ctan.org/pkg/pgf).

Disse og andre noter kan downloades fra [www.mathematicus.dk](http://www.mathematicus.dk).



Mike Vandal Auerbach, 2022

© 2022 Mike Vandal Auerbach.

Materialet er udgivet under en »Kreditering-Ikkekommerciel-Deling på samme vilkår 4.0 International«-licens (CC BY-NC-SA 4.0).

# Indhold

<b>1</b>	<b>Vektorer i planen</b>	<b>5</b>
1.1	Addition og subtraktion . . . . .	7
1.2	Vektorer og vinkler . . . . .	9
1.3	Øvelser . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Vinkler i planen</b>	<b>11</b>
2.1	Enhedsvektorer . . . . .	11
2.2	Cosinus, sinus og tangens . . . . .	12
2.3	Inverse trigonometriske funktioner . . . . .	13
2.4	Øvelser . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Skalarprodukt og determinant</b>	<b>17</b>
3.1	Skalarprodukt . . . . .	17
3.2	Vektorprojektion . . . . .	21
3.3	Determinant . . . . .	22
3.4	Øvelser . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Trekanter</b>	<b>29</b>
4.1	Notation . . . . .	30
4.2	Ensvinklede trekanter . . . . .	31
4.3	Retvinklede trekanter . . . . .	32
4.4	Arealet af en trekant . . . . .	35
4.5	Sinusrelationerne . . . . .	36
4.6	Cosinusrelationerne . . . . .	39
4.7	Øvelser . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Linjer</b>	<b>43</b>
5.1	Linjens parameterfremstilling . . . . .	43
5.2	Linjens ligning . . . . .	46
5.3	Afstanden fra et punkt til en linje . . . . .	49
5.4	Øvelser . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Cirkler</b>	<b>53</b>
6.1	Skæringspunkter mellem cirkler og linjer . . . . .	54
6.2	Cirkeltangenter . . . . .	56
6.3	Cirkelns parameterfremstilling . . . . .	58
6.4	Øvelser . . . . .	58



# Vektorer i planen

# 1

Hvis man kigger på et sted i et 2-dimensionalt koordinatsystem, kan man udtrykke stedets placering som et punkt  $(x, y)$  hvor  $x$ -koordinaten angiver stedets placering højre/venstre, mens  $y$ -koordinaten angiver placeringen op/ned.

Men hvis man bevæger sig i et koordinatsystem, kan man også angive bevægelsen ved et koordinatsæt som viser hvor mange enheder man har bevæget sig højre/venstre, og hvor mange enheder man har bevæget sig op/ned. En sådan »rutebeskrivelse« kaldes en *vektor*, og den vises ofte med en pil i et koordinatsystem. Et par eksempler på vektorer kan ses på figur 1.1.

Bemærk, at koordinatsættet for en vektor skrives lodret. Det gør man for at den ikke skal forveksles med et punkt. Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

beskriver altså følgende bevægelse i et koordinatsystem: 1 enhed mod venstre og 2 enheder opad. Symbolet for en vektor er et bogstav med en pil over, f.eks.  $\vec{a}$ . Pilen over  $a$  viser at der er tale om en vektor. Man har altså følgende definition på en vektor:

## Definition 1.1

En *vektor* i planen er en matematisk størrelse, der angiver en bevægelse i planen vha. to koordinater:

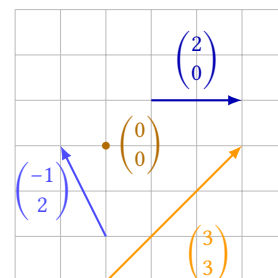
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Det er her vigtigt at pointere at en vektor kun er fastlagt af sine koordinater, og ikke ligger et bestemt sted. Enhver pil med samme retning er derfor en *repræsentant* for den samme vektor. For vektorerne på figur 1.2 gælder derfor at

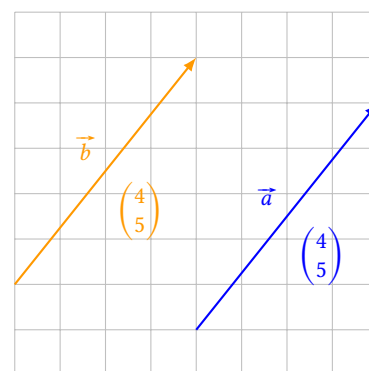
$$\vec{a} = \vec{b},$$

fordi de to pile har de samme koordinater (nemlig 4 mod højre, 5 op). De repræsenterer altså den samme vektor.

Til enhver vektor hører i øvrigt en såkaldt *modsat* vektor som er den vektor der peger i den modsatte retning. Den er defineret på følgende måde:



Figur 1.1: Eksempler på vektorer i planen.



Figur 1.2: To repræsentanter for den samme vektor.

**Definition 1.2**

Hvis  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ , definerer man den modsatte vektor til  $\vec{a}$  som

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}.$$

**Eksempel 1.3** Hvis  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ , så er den modsatte vektor givet ved

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -(-3) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Her kan man se, at  $\vec{a}$  betegner en bevægelse på 3 til venstre og 1 op, mens den modsatte vektor  $-\vec{a}$  betegner en bevægelse på 3 til højre og 1 ned.

I stedet for at tale om vektorens koordinater kan man også tale om at vektoren har en *længde* og en *retning*. Længden af vektoren svarer til længden af en pil der repræsenterer vektoren. Denne længde kan findes vha. Pythagoras' sætning. Ser man på figur 1.3, ser man at pilen der repræsenterer vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

er hypotenusen i en retvinklet trekant hvor kateterne er hhv. 3 og 4. Vektorens længde  $|\vec{a}|$  kan altså beregnes ved at bruge Pythagoras' sætning på vektorens koordinater

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$$

Der gælder derfor følgende sætning:

**Sætning 1.4**

Hvis vektoren  $\vec{a}$  har koordinaterne  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ , så er vektorens længde

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

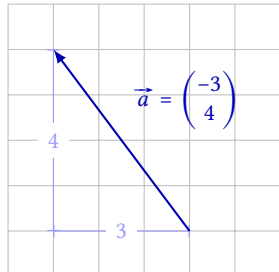
En speciel vektor er i øvrigt den vektor, der har koordinaterne  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Det er den eneste vektor, der har længden 0, den kaldes derfor *nulvektoren*,  $\vec{0}$ :

**Definition 1.5**

Den vektor hvis længde er 0, kaldes *nulvektoren*,  $\vec{0}$ .

Da denne vektors længde er 0, har den ingen retning. Man kalder den derfor for en *uegentlig vektor*.

Har man to punkter i planen, fastlægger disse en vektor. På figur 1.4 ses to repræsenterer for vektoren  $\overrightarrow{AB}$ . Pilen fra  $A$  til  $B$  fastlægger vektoren  $\overrightarrow{AB}$ ;



**Figur 1.3:** Længden af en vektor kan findes vha. Pythagoras' sætning.

men fordi alle pile med samme længde og retning er repræsentanter for den samme vektor, kan man altså lige så godt tegne vektorer et andet sted – som det også er gjort på figuren. Man har følgende definition:

### Definition 1.6

Hvis  $A$  og  $B$  er to punkter i planen, så er vektoren  $\vec{AB}$  den vektor, der kan repræsenteres ved en pil fra  $A$  til  $B$ .

Koordinaterne for vektoren  $\vec{AB}$  kan man finde ved at undersøge, hvor meget  $x$ -koordinaterne ændrer sig, når man flytter sig fra  $A$  til  $B$ . Hvis de to punkters koordinater er  $A(x_1, y_1)$  og  $B(x_2, y_2)$ , så må  $x$ -koordinaten vokse med  $x_2 - x_1$  og  $y$ -koordinaten vokse med  $y_2 - y_1$  (se figur 1.5). Man har derfor følgende sætning:

### Sætning 1.7

Vektoren  $\vec{AB}$  mellem punkterne  $A(x_1, y_1)$  og  $B(x_2, y_2)$  har koordinaterne

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Hvis man har ét punkt i et koordinatsystem, kan man herudfra definere en vektor der har samme koordinater som punktet, dette er en såkaldt *stedvektor*, der går fra origo (dvs.  $(0, 0)$ ) til punktet (se figur 1.6).

### Definition 1.8

Hvis  $A(x_0, y_0)$  er et punkt i et koordinatsystem, defineres *stedvektoren* til punktet som

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

$\vec{OA}$  er vektoren fra  $O(0, 0)$  til  $A(x_0, y_0)$ .

## 1.1 Addition og subtraktion

I dette afsnit beskrives hvordan man regner med vektorer. Vektorer kan lægges sammen og trækkes fra hinanden. Disse operationer er ganske enkelt defineret ved at man regner på koordinaterne hver for sig.

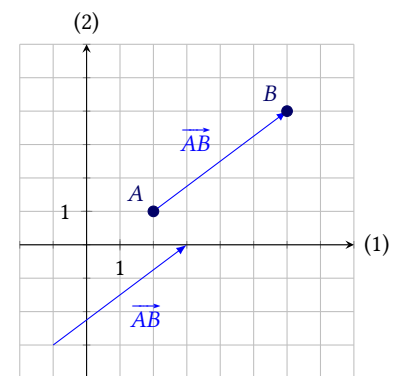
### Definition 1.9

Hvis der er givet to vektorer

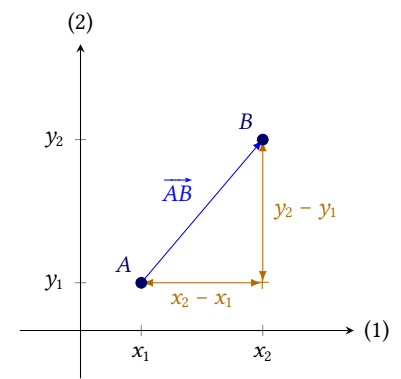
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

så definerer man

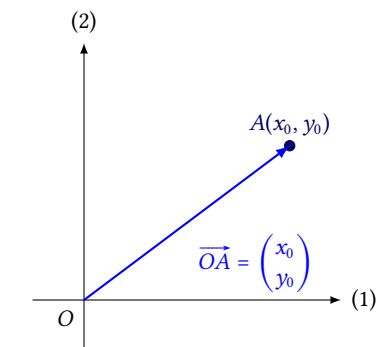
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}.$$



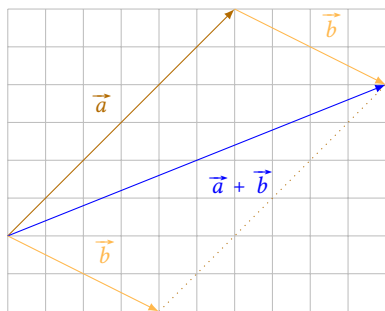
Figur 1.4: To repræsentanter for vektoren  $\vec{AB}$ .



Figur 1.5: Sådan beregnes koordinaterne for vektoren  $\vec{AB}$ .



Figur 1.6: Vektoren  $\vec{OA}$  har samme koordinater som punktet  $A$ .



Figur 1.7: Addition af vektorer.

Ved at analysere figur 1.7 kan man forholdsvis let argumentere for følgende sætning:

### Sætning 1.10

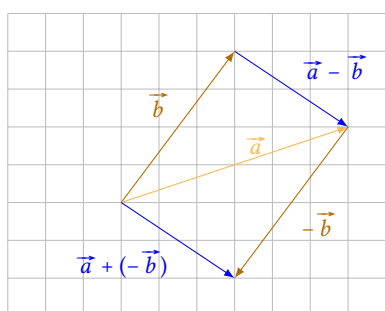
Summen  $\vec{a} + \vec{b}$  af de to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er den vektor man får ved at tegne en pil fra  $\vec{a}$ 's begyndelsespunkt til  $\vec{b}$ 's slutpunkt når vektor  $\vec{b}$  lægges i forlængelse af vektor  $\vec{a}$ .

Man kan også finde  $\vec{a} + \vec{b}$  som diagonalen i det parallellogram der udspringes af vektorerne  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  når de har samme begyndelsespunkt. (Parallellogrammet kaldes også »kræfternes parallellogram«.)

Man kan også fortolke subtraktion af vektorer geometrisk. Ser man på udregningen

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}),$$

fremgår det at man kan trække en vektor fra en anden ved at lægge den modsatte vektor til. Dvs. vi har følgende sætning (se også figur 1.8):



Figur 1.8: Subtraktion af vektorer.

### Sætning 1.11

Differensen  $\vec{a} - \vec{b}$  af de to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er den vektor man får ved at tegne en pil fra  $\vec{b}$ 's slutpunkt til  $\vec{a}$ 's slutpunkt når  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  tegnes med samme begyndelsespunkt.

Man kan også gange en vektor med et tal. Dette defineres på følgende måde:

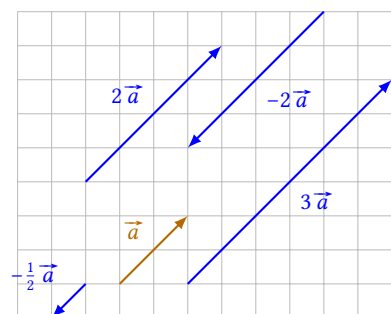
### Definition 1.12

Lad  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  være en vektor, og lad  $t$  være et tal. Så er

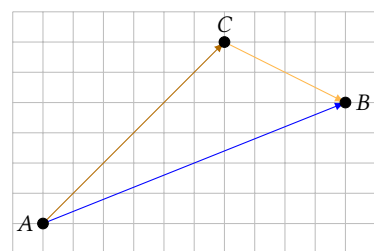
$$t \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} t \cdot a_1 \\ t \cdot a_2 \end{pmatrix}.$$

Fra denne definition følger det at når man ganger en vektor med  $t$ , bliver den  $t$  gange så lang – og hvis  $t < 0$ , så skifter vektoren retning. Dette er illustreret på figur 1.9.

For vektorer mellem punkter gælder specielt følgende vigtige sætning som er illustreret på figur 1.10.



Figur 1.9: Multiplikation af en vektor med et tal.



Figur 1.10: Indskudssætningen:  $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$ .



### Sætning 1.13: Indskudssætningen

Hvis  $A$ ,  $B$  og  $C$  er tre punkter i planen, så er

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}.$$

### Bevis

Lad de tre punkter have koordinaterne  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  og  $C(x_3, y_3)$ . Så er



$$\begin{aligned}\vec{AC} + \vec{CB} &= \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ y_2 - y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_3 - x_1 + x_2 - x_3 \\ y_3 - y_1 + y_2 - y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \vec{AB}.\end{aligned}$$

Idet der altså gælder at  $\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$ , er sætningen bevist. ■

## 1.2 Vektorer og vinkler

Selvom vektorer ikke ligger et bestemt sted, men betegner en bevægelse, kan man alligevel sammenligne dem geometrisk. Idet vektorer angiver en retning, kan man nemlig tale om hvilken vinkel de danner med hinanden, og om de er parallelle eller ortogonale. Den følgende definition omhandler de forskellige tilfælde:

### Definition 1.14

To vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  kaldes



*Ensrettede*  
hvis  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  peger i samme parallelle retning.



*Modsat rettede*  
hvis  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  peger i modsatte parallelle retninger.



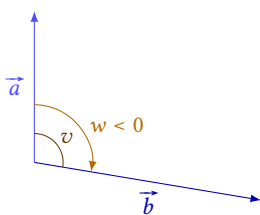
*Parallelle,  $\vec{a} \parallel \vec{b}$*   
hvis  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er enten ensrettede eller modsat rettede.



*Ortogonale,  $\vec{a} \perp \vec{b}$*   
hvis  $\vec{a}$  står vinkelret på  $\vec{b}$ .

Da nulvektoren ikke er en egentlig vektor, er denne hverken parallel med eller vinkelret på nogen anden vektor.

Ovenstående definition handler indirekte om vinkler mellem vektorer. Skal man måle vinklen mellem vektorer direkte, kan den måles på forskellig vis. Enten kan man måle den mindst mulige vinkel. Eller man kan måle vinklen ved at gå i en bestemt retning fra den ene vektor til den anden.



**Figur 1.11:** Vinklen  $v$  er vinklen mellem  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ , og  $w$  er vinklen fra  $\vec{a}$  til  $\vec{b}$ .

<sup>1</sup>Positiv omløbsretning er *mod uret* så hvis man bevæger sig med uret, er vinklen negativ.

### Definition 1.15: Vinkler mellem vektorer

Hvis  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er to vektorer, definerer man

1. vinklen *mellem* vektorerne  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  som er den mindste vinkel der udspændes mellem vektorerne, og
2. vinklen *fra*  $\vec{a}$  *til*  $\vec{b}$  som er den vinkel med *fortegn* man får ved at bevæge sig fra vektor  $\vec{a}$  til vektor  $\vec{b}$ .<sup>1</sup>

Vinklen mellem vektorerne  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  betegnes også med  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ . Forskellen på de to vinkler kan ses på figur 1.11.

Vinklen mellem  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er altså en vinkel mellem  $0^\circ$  og  $180^\circ$ , mens vinklen fra  $\vec{a}$  til  $\vec{b}$  er en vinkel mellem  $-180^\circ$  og  $180^\circ$ .

I næste kapitel bliver sammenhængen mellem koordinater og vinkler gennemgået i større detalje.

## 1.3 Øvelser

### Øvelse 1.1

Bestem den modsatte vektor til de følgende vektorer:

- a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$       b)  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$   
 c)  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$       d)  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

### Øvelse 1.2

Bestem længden af vektorerne i øvelse 1.1.

### Øvelse 1.3

Punkterne  $A$ ,  $B$ ,  $C$  og  $D$  er givet ved koordinaterne  $A(2, 1)$ ,  $B(3, 5)$ ,  $C(-4, 0)$  og  $D(2, 9)$ . Bestem koordinaterne til de følgende vektorer:

- a)  $\overrightarrow{AB}$       b)  $\overrightarrow{BC}$   
 c)  $\overrightarrow{DC}$       d)  $\overrightarrow{AD}$   
 e)  $\overrightarrow{CA}$       f)  $\overrightarrow{BD}$

### Øvelse 1.4

Der er givet de tre vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Beregn vektorerne

- a)  $\vec{a} + \vec{b}$       b)  $2 \cdot \vec{a}$   
 c)  $\vec{b} - \vec{c}$       d)  $\vec{c} + 3 \cdot \vec{a}$   
 e)  $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$       f)  $4 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{c} - 5 \cdot \vec{b}$

### Øvelse 1.5

Reducér så meget som muligt:

- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$   
 b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{DA}$   
 c)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$

# Vinkler i planen

# 2

I dette kapitel gennemgås sammenhængen mellem vektorkoordinater og vinkler. For at kunne beskrive sammenhængen er det praktisk først at introducere såkaldte *enhedsvektorer*.

## 2.1 Enhedsvektorer

Hvis man skal undersøge vinkler i planen, ser man kun på retningen af vektorerne. Man kan derfor i første omgang nøjes med at se på *enhedsvektorer*, dvs. vektorer med længde 1:

### Definition 2.1

En *enhedsvektor* er en vektor  $\vec{e}$  med længden 1.

Hvis  $\vec{a}$  er en vektor, er vektoren  $\vec{e}_{\vec{a}}$  en enhedsvektor i samme retning som  $\vec{a}$ , dvs.

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} .$$

I de sædvanlige koordinatsystem i planen er to retninger specielle, nemlig de retninger der er givet ved første- og andenaksen ( $x$ - og  $y$ -aksen). Man definerer derfor to specielle enhedsvektorer der hører til disse retninger:

### Definition 2.2

I det sædvanlige koordinatsystem i planen er  $\vec{e}_x$  en enhedsvektor i førsteaksens retning, og  $\vec{e}_y$  en enhedsvektor i andenaksens retning, dvs.

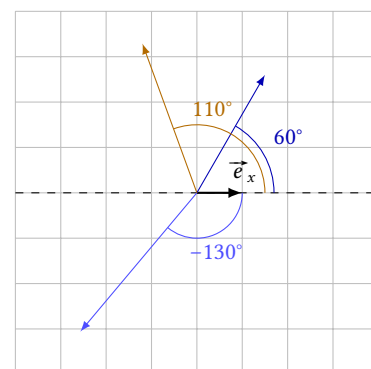
$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Da alle enhedsvektorer har den samme længde, er den eneste forskel på dem hvilken retning de peger i. Denne retning kan beskrives vha. en vinkel. Man kan derfor definere en vektors *retningsvinkel* på følgende måde:

### Definition 2.3

Retningsvinklen for vektoren  $\vec{a}$  er vinklen fra  $\vec{e}_x$  til  $\vec{a}$ .

På figur 2.1 ses 3 forskellige vektorer og deres retningsvinkler. Husk at vinkler mod uret regnes positive, og vinkler med uret regnes negative.



Figur 2.1: Vektoren  $\vec{e}_x$  og retningsvinklerne for forskellige vektorer.



## 2.2 Cosinus, sinus og tangens

Enhedsvektorer kan sammen med retningsvinkler bruges til at definere de såkaldte *trigonometriske* funktioner *cosinus* og *sinus*. De to funktioner omregner en retningsvinkel til første- og andenkoordinaterne for den tilsvarende enhedsvektor.

### Definition 2.4

Lad enhedsvektoren  $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$  have retningsvinklen  $v$ . Så defineres de tre trigonometriske funktioner  $\cos$ ,  $\sin$  og  $\tan$  som

1.  $\cos(v) = e_1$ ,
2.  $\sin(v) = e_2$ , og
3.  $\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$ .

Bemærk at  $\tan(v)$  er udefineret når  $\cos(v) = 0$ , dvs. hvis  $v = \pm 90^\circ$ .

De tre funktioner er indbygget i de fleste lommeregner og alle CAS-værktøjer.

Bemærk at da  $\cos(v)$  og  $\sin(v)$  er hhv.  $x$ - og  $y$ -koordinater til en enhedsvektor, så vil  $\cos(v)$  og  $\sin(v)$  kun kunne give værdier mellem  $-1$  og  $1$ , altså

$$-1 \leq \cos(v) \leq 1 \quad \text{og} \quad -1 \leq \sin(v) \leq 1 .$$

**Eksempel 2.5** Den enhedsvektor  $\vec{e}_{130^\circ}$ , der har retningsvinklen  $v = 130^\circ$  har koordinaterne

$$\vec{e}_{130^\circ} = \begin{pmatrix} \cos(130^\circ) \\ \sin(130^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,643 \\ 0,766 \end{pmatrix} .$$

Denne vektor og to andre enhedsvektorer kan ses på figur 2.2.

Ved at analysere symmetri i planen kan man bevise følgende sætning:

### Sætning 2.6

Der gælder

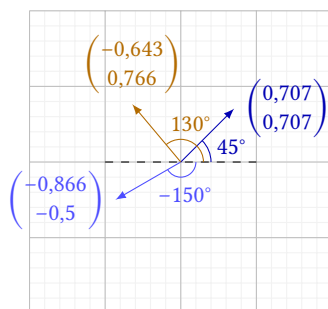
- |                                     |                                    |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $\cos(-v) = \cos(v)$             | 4. $\sin(180^\circ - v) = \sin(v)$ |
| 2. $\sin(-v) = -\sin(v)$            | 5. $\cos(90^\circ - v) = \sin(v)$  |
| 3. $\cos(180^\circ - v) = -\cos(v)$ | 6. $\sin(90^\circ - v) = \cos(v)$  |

Idet længden af en enhedsvektor er 1, kan man også udlede følgende sætning:

### Sætning 2.7: Grundrelationen mellem cosinus og sinus

Der gælder

$$\cos(v)^2 + \sin(v)^2 = 1 .$$



Figur 2.2: Nogle enhedsvektorer og deres koordinater.

Enhver vektor kan beskrives vha. dens længde og dens retningsvinkel, og de to funktioner  $\cos$  og  $\sin$  kan bruges til at omregne dette til koordinater.

**Eksempel 2.8** Vektoren  $\vec{a}$  har længden  $|\vec{a}| = 4$  og retningsvinkel  $v = 35^\circ$ . Vektorens koordinater kan da findes vha. følgende beregning:<sup>1</sup>

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}_{\vec{a}} = 4 \cdot \begin{pmatrix} \cos(35^\circ) \\ \sin(35^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0,819 \\ 4 \cdot 0,574 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,28 \\ 2,29 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>Husk at  $\vec{e}_{\vec{a}}$  er en enhedsvektor i  $\vec{a}$ 's retning (se definition 2.4).

### 2.3 Inverse trigonometriske funktioner

I eksempel 2.8 blev en vektors koordinater beregnet ud fra retningsvinklen og længden. Det ville være praktisk hvis man også kunne regne den anden vej – altså finde længden og retningsvinklen ud fra koordinaterne.

Længden af en vektor kan beregnes vha. formlen i sætning 1.4, men hvad med vinklen? Hvis man har en enhedsvektor  $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ , gælder der at,

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix},$$

dvs.

$$\cos(v) = e_1 \quad \text{og} \quad \sin(v) = e_2,$$

For at finde retningsvinklen  $v$  har man altså brug for at kunne løse sådanne ligninger. Dvs. man har brug for funktioner, der virker modsat  $\cos$  og  $\sin$ .

At det ikke er helt trivielt at konstruere disse funktioner ses af følgende eksempel:

**Eksempel 2.9** Lad  $\vec{e}_1$  være enhedsvektoren med retningsvinkel  $20^\circ$ , og  $\vec{e}_2$  være enhedsvektoren med retningsvinkel  $-20^\circ$ . Da har de to vektorer koordinaterne

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \begin{pmatrix} \cos(20^\circ) \\ \sin(20^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,940 \\ 0,342 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_2 &= \begin{pmatrix} \cos(-20^\circ) \\ \sin(-20^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,940 \\ -0,342 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

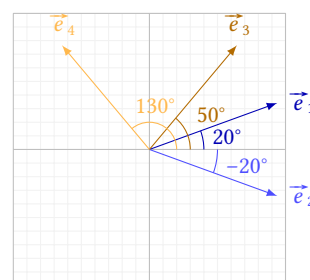
De to vektorer  $\vec{e}_1$  og  $\vec{e}_2$  har altså forskellige retningsvinkler, men samme  $x$ -koordinat.

Hvis  $\vec{e}_3$  og  $\vec{e}_4$  er enhedsvektorerne med retningsvinklerne  $50^\circ$  og  $130^\circ$  er deres koordinater

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 &= \begin{pmatrix} \cos(50^\circ) \\ \sin(50^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,643 \\ 0,766 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_4 &= \begin{pmatrix} \cos(130^\circ) \\ \sin(130^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,643 \\ 0,766 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Her er der altså tale om enhedsvektorer med forskellige retningsvinkler, men samme  $y$ -koordinat.

De fire vektorer kan ses på figur 2.3.



**Figur 2.3:** Enhedsvektorer med samme  $x$ - eller  $y$ -koordinat.

De såkaldte *inverse* trigonometriske funktioner kan derfor kun give én af to mulige retningsvinkler hvis man kender enten  $x$ - eller  $y$ -koordinaten. Funktionerne defineres på følgende måde:<sup>2</sup>

<sup>2</sup>De to funktioner kaldes undertiden også arccos og arcsin. »arc« står for *arcus*, som betyder »bue« på latin. arcsin er altså den bue (vinkel), hvis sinus har en bestemt værdi.

I computerprogrammer/CAS-værktøjer kaldes de to funktioner i øvrigt ofte asin og acos.

### Definition 2.10

Funktionen  $\cos^{-1}$  kaldes *invers cosinus*.  $\cos^{-1}(t)$  er den vinkel  $v$  i intervallet mellem  $0^\circ$  og  $180^\circ$  der løser ligningen  $\cos(v) = t$ .

Funktionen  $\sin^{-1}$  kaldes *invers sinus*.  $\sin^{-1}(t)$  er den vinkel  $v$  i intervallet mellem  $-90^\circ$  og  $90^\circ$  der løser ligningen  $\sin(v) = t$ .

**Eksempel 2.11** Hvis man vil løse ligningen

$$\cos(v) = 0,5 ,$$

beregner man vha. en lommeregner at

$$v = \cos^{-1}(0,5) = 60^\circ .$$

$v = 60^\circ$  er altså en løsning til ligningen.

Hvis man løser en ligning med cosinus eller sinus på denne måde, skal man være opmærksom på at man ikke finder alle løsninger.

Af eksempel 2.9 følger at  $-60^\circ$  faktisk også er en løsning til ligningen  $\cos(v) = 0,5$ , dvs. i virkeligheden burde ligningen være løst på denne måde:

$$\cos(v) = 0,5 \quad \Leftrightarrow \quad v = \pm \cos^{-1}(0,5) \quad \Leftrightarrow \quad v = \pm 60^\circ .$$

(Her angiver tegnet  $\pm$  at der er to løsninger: én med  $+$  og én med  $-$ .)

Nu er det muligt at udlede en formel til at finde retningsvinklen for en vektor ud fra koordinaterne:

### Sætning 2.12

Lad vektoren  $\vec{a}$  være givet ved koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} .$$

Vektorens retningsvinkel er da

$$v = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}\right) & \text{hvis } a_2 \geq 0 \\ -\cos^{-1}\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}\right) & \text{hvis } a_2 < 0 \end{cases} .$$

### Bevis

Hvis  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ , vil en enhedsvektor i  $\vec{a}$ 's retning være givet ved

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{|\vec{a}|} \\ \frac{a_2}{|\vec{a}|} \end{pmatrix} .$$

Enhedsvektoren har også koordinaterne  $\vec{e}_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$  hvor  $v$  er retningsvinklen for  $\vec{a}$ . Dvs.

$$\cos(v) = \frac{a_1}{|\vec{a}|} \quad \Leftrightarrow \quad v = \pm \cos^{-1} \left( \frac{a_1}{|\vec{a}|} \right) .$$

Hvis vektoren  $\vec{a}$  har en positiv  $y$ -koordinat ( $a_2 \geq 0$ ), så vil retningsvinklen være positiv, dvs. løsningen med  $+$  er den korrekte. Den anden løsning er korrekt hvis  $a_2 < 0$ . Hermed er sætningen bevist. ■

**Eksempel 2.13** I dette eksempel bestemmes længden og retningsvinklen for de to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} .$$

Længden af vektor  $\vec{a}$  er

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 ,$$

og retningsvinklen er

$$v = \cos^{-1} \left( \frac{3}{5} \right) = 53,13^\circ .$$

Længden af vektor  $\vec{b}$  er

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-7)^2} = \sqrt{53} = 7,28 ,$$

og retningsvinklen er

$$w = -\cos^{-1} \left( \frac{2}{7,28} \right) = -74,05^\circ .$$

Bemærk at retningsvinklen for  $\vec{b}$  er negativ fordi vektor  $\vec{b}$  har en negativ andenkoordinat.

## 2.4 Øvelser

### Øvelse 2.1

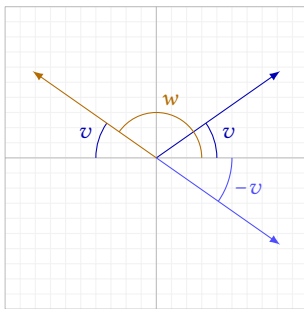
Bestem koordinaterne til enhedsvektorerne med retningsvinkel

- a)  $15^\circ$                       b)  $60^\circ$   
 c)  $-30^\circ$                       d)  $145^\circ$

og tegn vektorerne i et koordinatsystem.

### Øvelse 2.2

Billedet herunder viser 3 enhedsvektorer med retningsvinklerne  $v$ ,  $-v$  og  $w = 180^\circ - v$ .



- a) Brug billedet til at argumentere for sætning 2.6.

### Øvelse 2.3

Bestem koordinaterne til vektoren  $\vec{a}$  med retningsvinkel  $v$  når

- a)  $|\vec{a}| = 4$  og  $v = 36^\circ$   
 b)  $|\vec{a}| = 5,3$  og  $v = 100^\circ$   
 c)  $|\vec{a}| = 12$  og  $v = -120^\circ$

### Øvelse 2.4

Der er givet de tre vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tegn de følgende vektorer i et koordinatsystem, og beregn derefter deres længde og retningsvinkel.

- a)  $\vec{a}$                                       b)  $\vec{b}$   
 c)  $\vec{c}$                                       d)  $\vec{a} + \vec{b}$   
 e)  $\vec{b} - \vec{c}$                                 f)  $2 \cdot \vec{a} - 5 \cdot \vec{b}$   
 g)  $\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$



# Skalarprodukt og determinant

# 3

Indtil videre er der kun set på addition og subtraktion når man regner med vektorer. Der findes dog også andre regneoperationer, nemlig skalarproduktet og determinanten som gennemgås i dette kapitel.

## 3.1 Skalarprodukt

Det er ikke muligt at gange to vektorer med hinanden og få en ny vektor; men der findes en form for multiplikation som kaldes *skalarproduktet*<sup>1</sup> hvor resultatet er en skalar, dvs. et tal.

<sup>1</sup>Det kaldes også somme tider »prikproduktet« fordi symbolet er en prik.

### Definition 3.1: Skalarprodukt

Hvis de to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  har koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

så er *skalarproduktet* af de to vektorer tallet

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

### Eksempel 3.2 Hvis

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix},$$

så er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 8 + 2 \cdot (-5) = 24 + (-10) = 14.$$

Bemærk i øvrigt at når man regner med almindelige variable, er det normalt at udelade gangetegnet og skrive f.eks.  $ab$  i stedet for  $a \cdot b$ ; men ved skalarproduktet *skal* man *altid* skrive symbolet.

Der gælder følgende regneregler for skalarproduktet:

**Sætning 3.3**

Hvis  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  og  $\vec{c}$  er vektorer, gælder der

1.  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ . (længde og skalarprodukt)
  2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ . (den kommutative lov)
  3.  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ .
  4.  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ .
- } (den distributive lov)
5.  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$ .
  6.  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$ .
  7.  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$ .

**Bevis**

Alle regnereglerne kan bevises ved regning med koordinater. Her bevises 1, 3 og 5; resten overlades til læseren.

Hvis  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ , så er

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 = a_1^2 + a_2^2 = \left( \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \right)^2 = |\vec{a}|^2 .$$

Hermed er 1 bevist.

Hvis de tre vektorer  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  og  $\vec{c}$  har koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix},$$

så er

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + c_x \\ b_2 + c_y \end{pmatrix} \\ &= a_1(b_1 + c_x) + a_2(b_2 + c_y) \\ &= a_1 b_1 + a_1 c_x + a_2 b_2 + a_2 c_y \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 c_x + a_2 c_y \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, \end{aligned}$$

hvilket beviser 3.

For de to vektorer  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  og  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  gælder

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 + b_1)(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)(a_2 + b_2) \\ &= a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1 + a_2^2 + b_2^2 + 2a_2 b_2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) \end{aligned}$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b},$$

hvorved også 5 er bevist. ■

Skalarproduktet viser sig at være en praktisk størrelse fordi det kan fortælle noget om hvordan vektorer ligger i forhold til hinanden. På figur 3.1 ses to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  hvor  $\vec{a}$  er parallel med  $\vec{e}_x$ , og vektoren  $\vec{b}$  har retningsvinklen  $v$ . Man kan derfor skrive de to vektorers koordinater som

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cdot \cos(v) \\ |\vec{b}| \cdot \sin(v) \end{pmatrix}.$$

Skalarproduktet mellem disse to vektorer bliver så

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v) + 0 \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(v),$$

hvor  $v$  er vinklen mellem vektorerne.

Det viser sig at denne formel gælder generelt, og ikke kun hvis vektorerne er placeret som på figur 3.1. Man har altså følgende sætning:

#### Sætning 3.4

Hvis  $v = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ , så er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(v).$$

Hvis man skriver lidt om på formelen i denne sætning, får man

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

som kan bruges direkte til at bestemme vinklen mellem to vektorer.

Det er i øvrigt her værd at bemærke at sætning 3.4 også gælder hvis man indsætter vinklen med fortegn idet  $\cos(-v) = \cos(v)$ .

**Eksempel 3.5** Her beregnes vinklen mellem de to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

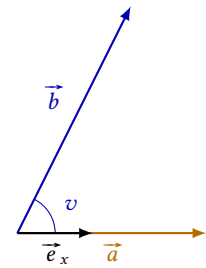
Først beregnes de to vektorers længder:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 6^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$$

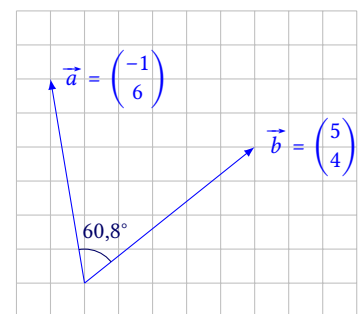
$$|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}.$$

Disse kan nu indsættes i formelen

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{37} \sqrt{41}} = \frac{-1 \cdot 5 + 6 \cdot 4}{\sqrt{37} \cdot 41} = \frac{19}{\sqrt{1517}},$$



Figur 3.1: Vektorerne  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ .



Figur 3.2: Vinklen mellem vektor  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er  $60,8^\circ$ .

og man finder vinklen  $v$

$$v = \cos^{-1} \left( \frac{19}{\sqrt{1517}} \right) = 60,8^\circ .$$

Altså er vinklen mellem de to vektorer  $60,8^\circ$  (se figur 3.2).

Vinklen mellem to vektorer ligger mellem  $0^\circ$  og  $180^\circ$ . Hvis der for en vinkel  $v$  gælder at  $0^\circ \leq v < 90^\circ$ , er  $\cos(v) > 0$ . Hvis  $90^\circ < v \leq 180^\circ$ , er  $\cos(v) < 0$ . Specielt for  $v = 90^\circ$  gælder  $\cos(v) = 0$ . Sætning 3.4 fører derfor til følgende:

### Sætning 3.6

Lad  $v$  være vinklen mellem de to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ . Der gælder da

1. Hvis  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ , så er  $0^\circ \leq v < 90^\circ$ .
2. Hvis  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , så er  $v = 90^\circ$ , dvs.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .
3. Hvis  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ , så er  $90^\circ < v \leq 180^\circ$ .

Denne sætning giver en nem test for om to vektorer er ortogonale. Man skal blot beregne deres skalarprodukt. Hvis det giver 0, så er vektorerne ortogonale. Ellers er de ikke.

**Eksempel 3.7** For de to vektorer  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$  og  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  er

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) = 0 .$$

Da  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  er disse to vektorer ortogonale.

**Eksempel 3.8** Der er givet to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} ,$$

hvor  $t$  er et tal. Hvis de to vektorer er ortogonale, hvad er så tallet  $t$ ?

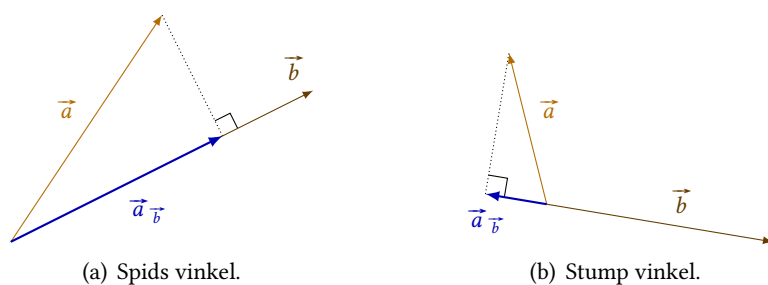
Her beregnes først

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + t \cdot 4 = 6 + 4t .$$

Idet de to vektorer er ortogonale, er  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , dvs.

$$6 + 4t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4t = -6 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} .$$

Hvis de to vektorer er ortogonale, har man altså, at  $t = -\frac{3}{2}$ .



Figur 3.3: Projektionen af  $\vec{a}$  på  $\vec{b}$  når vinklen mellem de to vektorer er hhv. spids og stump.



### 3.2 Vektorprojektion

At *projicere* vektor  $\vec{a}$  på  $\vec{b}$  gøres ved at nedfælde vektor  $\vec{a}$  vinkelret på vektor  $\vec{b}$ . Det illustreres lettest ved at lade de to vektorer have samme begyndelsespunkt. På figur 3.3 ses hvordan vektor  $\vec{a}_b$  der er projektionen af  $\vec{a}$  på  $\vec{b}$ , ligger når vinklen mellem de to vektorer er spids, og når den er stump.

Som man kan se på figuren er  $\vec{a}_b \parallel \vec{b}$ , og de to vektorer er ensrettede hvis vinklen mellem  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er spids, og modsat rettede hvis den er stump. Koordinaterne til  $\vec{a}_b$  kan bestemmes vha. følgende sætning:

#### Sætning 3.9

For projektionen  $\vec{a}_b$  af vektor  $\vec{a}$  på  $\vec{b}$  gælder at

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b},$$

og

$$|\vec{a}_b| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}.$$

#### Bevis

På figur 3.4 ses det stumpvinklede tilfælde. Der er tillige indtegnet en vektor  $\vec{c}$  som opfylder

$$\vec{a}_b + \vec{c} = \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{c} = \vec{a} - \vec{a}_b.$$

Idet  $\vec{a}_b \parallel \vec{b}$ , findes der et tal  $t$  så

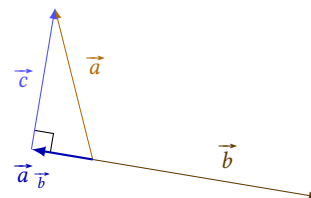
$$\vec{a}_b = t\vec{b},$$

dvs.

$$\vec{c} = \vec{a} - t\vec{b}.$$

Tager man skalarproduktet med  $\vec{b}$  på begge sider af denne ligning, får man

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = (\vec{a} - t\vec{b}) \cdot \vec{b}.$$



Figur 3.4: Projektionen af  $\vec{a}$  på  $\vec{b}$ , når vinklen mellem  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er stump.

Men  $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$  da disse to vektorer står vinkelret på hinanden, så ligningen kan omskrives til

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{a} - t\vec{b}) \cdot \vec{b} && \Leftrightarrow \\ 0 &= \vec{a} \cdot \vec{b} - t\vec{b} \cdot \vec{b} && \Leftrightarrow \\ 0 &= \vec{a} \cdot \vec{b} - t|\vec{b}|^2 && \Leftrightarrow \\ t &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}. \end{aligned}$$

Da  $\vec{a}_{\vec{b}} = t\vec{b}$ , får man altså

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}.$$

Den anden del af sætningen omhandler længden af projektionsvektoren. Men da man kender en formel for vektoren, tager man blot længden af denne og får

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|^2} |\vec{b}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|},$$

og sætningen er dermed vist. ■

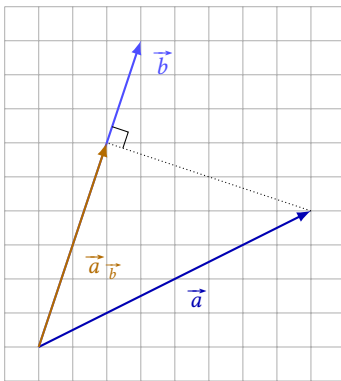
**Eksempel 3.10** Hvis

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix},$$

så er  $\vec{a}$ 's projektion på  $\vec{b}$

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + 9^2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{8 \cdot 3 + 4 \cdot 9}{9 + 81} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{60}{90} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Vektorerne kan ses på figur 3.5.



Figur 3.5: Projektionen af  $\vec{a}$  på  $\vec{b}$ .

### 3.3 Determinant

Vha. skalarproduktet kan man afgøre om to vektorer er ortogonale. Der findes en anden størrelse, *determinanten*, som kan bruges til at afgøre om vektorer er parallelle. Før determinanten kan defineres, skal man dog lige have defineret følgende:

#### Definition 3.11

For en vektor  $\vec{a}$  defineres *tværvektoren*  $\widehat{\vec{a}}$  som den vektor man får ved at dreje  $\vec{a}$  90° i positiv omløbsretning (dvs. mod uret).

Et eksempel på en tværvektor kan ses på figur 3.6.

En tværvektors koordinater er givet ud fra den oprindelige vektors koordinater:

### Sætning 3.12

Hvis  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ , så er  $\widehat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ .

### Bevis (skitse)

På figur 3.7 er de to vektorer  $\vec{a}$  og  $\widehat{\vec{a}}$  indtegnet i et koordinatsystem. Som det ses af figuren er

$$\widehat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} . \quad \blacksquare$$

For tværvektorer gælder følgende sætning som kan bevises ved regning med koordinater:

### Sætning 3.13

For to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  gælder

1.  $\widehat{\widehat{\vec{a}}} = -\vec{a}$ , og
2.  $\widehat{\vec{a} + \vec{b}} = \widehat{\vec{a}} + \widehat{\vec{b}}$ .

Determinanten af to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er defineret ud fra tværvektoren til  $\vec{a}$  og skalarproduktet. Man har følgende:

### Definition 3.14

For to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  definerer man *determinanten*,

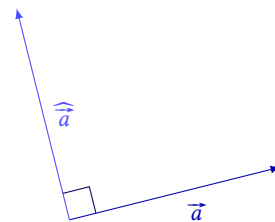
$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{\vec{a}} \cdot \vec{b} .$$

Hvis de to vektorer har koordinaterne  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  og  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , skriver man også

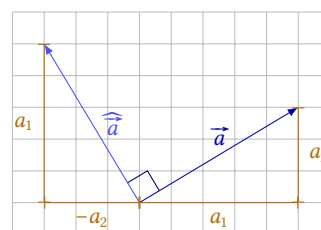
$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

Notationen  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$  er opfundet for gøre beregningen af determinanten mere overskuelig. Den skal forstås på den måde at man først beregner produktet af diagonalen fra øverste venstre hjørne til nederste højre og derefter fratrækker produktet af diagonalen fra nederste venstre hjørne til øverste højre:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$



Figur 3.6: Tværvektoren  $\widehat{\vec{a}}$  til  $\vec{a}$ .



Figur 3.7: Koordinaterne til  $\widehat{\vec{a}}$  kan findes ud fra koordinaterne til  $\vec{a}$ .

**Eksempel 3.15** Determinanten af de to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-4) = 3 - (-8) = 11.$$

Når man tager determinanten af to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er rækkefølgen ikke ligegyldig. Følgende sætning angiver en række regneregler for determinanten:

### Sætning 3.16

For vektorerne  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  og  $\vec{c}$  gælder der

1.  $\det(\vec{b}, \vec{a}) = -\det(\vec{a}, \vec{b})$ ,
2.  $\det(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{c}) + \det(\vec{b}, \vec{c})$ ,
3.  $\det(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) + \det(\vec{a}, \vec{c})$ .

### Bevis

Den første del kan bevises ved regning med koordinater. Hvis

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

så er

$$\begin{aligned} \det(\vec{b}, \vec{a}) &= \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = b_1 a_2 - b_2 a_1 \\ &= a_2 b_1 - a_1 b_2 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1) = -\det(\vec{a}, \vec{b}). \end{aligned}$$

For  $\det(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c})$  gælder der ifølge sætning 3.3 og 3.13 samt definition 3.14 at

$$\begin{aligned} \det(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) &= \overrightarrow{(\vec{a} + \vec{b})} \cdot \vec{c} \\ &= (\widehat{\vec{a}} + \widehat{\vec{b}}) \cdot \vec{c} = \widehat{\vec{a}} \cdot \vec{c} + \widehat{\vec{b}} \cdot \vec{c} \\ &= \det(\vec{a}, \vec{c}) + \det(\vec{b}, \vec{c}). \end{aligned}$$

Den sidste del af beviset overlades som en øvelse til læseren. ■

Hvis  $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$  er  $\widehat{\vec{a}} \cdot \vec{b} = 0$ . Ifølge sætning 3.6 betyder det at  $\widehat{\vec{a}}$  og  $\vec{b}$  er ortogonale. Hvis  $\widehat{\vec{a}}$  og  $\vec{b}$  er ortogonale, må  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  være parallelle. Der gælder derfor følgende sætning:



**Sætning 3.17**

For to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  gælder der

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Man kan altså ved at beregne determinanten afgøre om to vektorer er parallelle.

Det viser sig at determinanten har en geometrisk fortolkning. Størrelsen af determinanten er nemlig lig arealet af det parallellogram der udspændes af de to vektorer. Der gælder altså:

**Sætning 3.18**

Det parallellogram der udspændes af de to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ , har arealet

$$P = \left| \det(\vec{a}, \vec{b}) \right|.$$

**Bevis**

På figur 3.8 ses parallellogrammet udspændt af de to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ . Parallellogrammets grundlinje udgøres af vektor  $\vec{a}$ , dvs. dens længde er  $|\vec{a}|$ .

På figuren er også indtegnet  $\widehat{\vec{a}}$  samt projektionen  $\vec{b}_{\widehat{\vec{a}}}$  af  $\vec{b}$  på denne vektor. Vektoren  $\vec{b}_{\widehat{\vec{a}}}$  står vinkelret på  $\vec{a}$ , og dens længde svarer til afstanden mellem to parallelle sider i parallellogrammet. Arealet  $P$  må derfor have størrelsen

$$P = \left| \vec{b}_{\widehat{\vec{a}}} \right| |\vec{a}|.$$

Vha. sætning 3.9 kan dette omskrives til

$$P = \frac{|\vec{b} \cdot \widehat{\vec{a}}|}{|\widehat{\vec{a}}|} |\vec{a}|.$$

Men da  $|\widehat{\vec{a}}| = |\vec{a}|$ , er dette det samme som

$$P = \frac{|\vec{b} \cdot \widehat{\vec{a}}|}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = |\vec{b} \cdot \widehat{\vec{a}}| = \left| \det(\vec{a}, \vec{b}) \right|. \quad \blacksquare$$

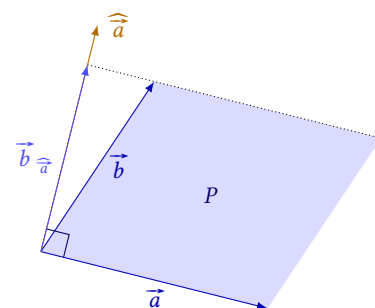
**Eksempel 3.19** Her beregnes arealet af parallellogrammet udspændt af vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ifølge sætning 3.18 er arealet

$$\left| \det(\vec{a}, \vec{b}) \right| = \left| \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right| = |3 \cdot 1 - 2 \cdot 5| = |-7| = 7.$$

Arealet af parallellogrammet er altså 7.



**Figur 3.8:** Parallellogrammet udspændt af  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ .

**Eksempel 3.20** De to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

udspænder et parallelogram med areal 10. Hvad er tallet  $t$ ?

Anvender man sætning 3.18, kan man opstille et udtryk for arealet:

$$\left| \det(\vec{a}, \vec{b}) \right| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ t & 4 \end{vmatrix} \right| = |2 \cdot 4 - t \cdot 1| = |8 - t| .$$

Da man ved at arealet er 10, får man derfor ligningen

$$|8 - t| = 10 .$$

Idet der er tale om en ligning med numerisk værdi, er der i virkeligheden to ligninger. Hvis  $8 - t$  giver 10, er ligningen opfyldt; men det er den også hvis  $8 - t$  giver  $-10$ , dvs.

$$\begin{aligned} 8 - t = 10 & \quad \vee \quad 8 - t = -10 & \quad \Leftrightarrow \\ t = -2 & \quad \vee \quad t = 18 . \end{aligned}$$

Altså er arealet af parallelogrammet 10, hvis  $t = -2$  eller  $t = 18$ .

Indtil videre er det kun den numeriske værdi af determinanten der har fået en geometrisk fortolkning. Det viser sig dog at man kan angive en formel der knytter værdien af determinanten (med fortegn) til geometrien af vektorerne.

### Sætning 3.21

Hvis der er givet to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ , og  $v$  er vinklen fra  $\vec{a}$  til  $\vec{b}$ , så er

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(v) .$$

### Bevis

Hvis  $v$  er vinklen fra  $\vec{a}$  til  $\vec{b}$ , så kan vinklen  $w$  mellem  $\widehat{\vec{a}}$  og  $\vec{b}$  beregnes som

$$w = 90^\circ - v .$$

Sammenhængen mellem  $v$  og  $w$  kan findes ved at analysere placeringen af  $\vec{a}$ ,  $\widehat{\vec{a}}$  og  $\vec{b}$ , se figur 3.9.

Iflg. sætning 2.6 er så

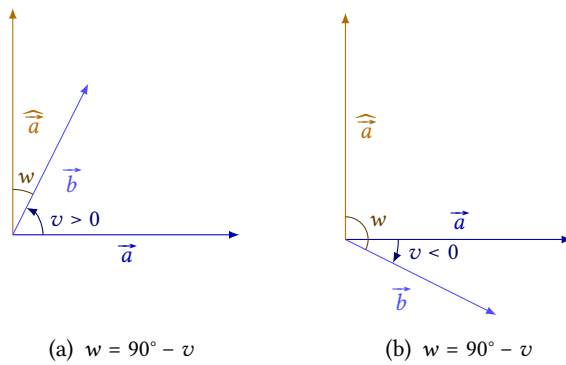
$$\cos(w) = \cos(90^\circ - v) = \sin(v) .$$

<sup>2</sup>I beregningen udnyttes, at  $|\widehat{\vec{a}}| = |\vec{a}|$  da en tværvektor har samme længde som den oprindelige vektor.

Det betyder at<sup>2</sup>

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{\vec{a}} \cdot \vec{b} = |\widehat{\vec{a}}| |\vec{b}| \cos(w) = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(v) .$$

Hermed er sætningen bevist. ■



**Figur 3.9:** Placeringen af  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  i forhold til hinanden afgør hvordan man skal beregne  $w$  som er vinklen mellem  $\widehat{a}$  og  $\vec{b}$  – men i alle tilfælde finder man  $w = v - 90^\circ$ .

### 3.4 Øvelser

#### Øvelse 3.1

Beregn

- a)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$   
 c)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$       d)  $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

#### Øvelse 3.2

Der er givet de tre vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestem vinklen mellem vektorerne

- a)  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$       b)  $\vec{a}$  og  $\vec{c}$   
 c)  $\vec{a} + \vec{b}$  og  $\vec{c}$       d)  $\vec{b} - \vec{c}$  og  $\vec{a} + \vec{b}$   
 e)  $\vec{a}$  og  $\vec{b} - \vec{a}$       f)  $\vec{c}$  og  $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

#### Øvelse 3.3

Afgør om de følgende vektorer er ortogonale.

- a)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  og  $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  og  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

#### Øvelse 3.4

Der er givet de tre vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestem tallet  $t$ , så

- a)  $\vec{a}$  og  $\vec{c}$  er ortogonale  
 b)  $\vec{b}$  og  $\vec{c}$  er ortogonale  
 c)  $\vec{a} + \vec{b}$  og  $\vec{c}$  er ortogonale  
 d)  $\vec{c}$  og  $\vec{a} - \vec{c}$  er ortogonale

#### Øvelse 3.5

To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestem

- a)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$       b)  $\vec{b} \cdot \vec{a}$       c)  $\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b}$

#### Øvelse 3.6

Der er givet de tre vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem længden af  $\vec{a}$ 's projektion på  $\vec{b}$ .  
 b) Bestem  $t$  så  $\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{a}$ .  
 c) Bestem  $t$  så længden af  $\vec{c}$ 's projektion på  $\vec{b}$  er 2.

#### Øvelse 3.7

Bestem tværvektoren til  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ , og tegn  $\vec{a}$  og  $\widehat{a}$  i et koordinatsystem.

#### Øvelse 3.8

Beregn følgende determinanter:

- a)  $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$       b)  $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}$   
 c)  $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 5 & -9 \end{vmatrix}$       d)  $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$

**Øvelse 3.9**

Vektorerne  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er givet ved koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestem  $t$  så

- $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er parallelle
- $\vec{a} + \vec{b}$  og  $\widehat{\vec{b}}$  er parallelle

**Øvelse 3.10**

De tre punkter  $P, Q$  og  $R$  er givet ved koordinaterne

$$P(3, 2), \quad Q(8, -1) \quad \text{og} \quad R(4, 0).$$

Bestem arealet af det parallelogram der er udspændt af vektorerne

- $\overrightarrow{PQ}$  og  $\overrightarrow{PR}$
- $\overrightarrow{PR}$  og  $\widehat{QR}$
- $2 \cdot \overrightarrow{PR}$  og  $\widehat{RQ}$
- $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QP}$  og  $3 \cdot \overrightarrow{PQ}$

# Trekanter

# 4

En trekant kan beskrives ud fra de tre punkter der udgør hjørnerne i trekanten. Trekanten  $ABC$  er således den trekant der har hjørner i de tre punkter  $A$ ,  $B$  og  $C$ . Den side i trekanten der går fra punkt  $A$  til  $B$ , kan så kaldes  $AB$ . Længden af siden  $AB$  betegnes med  $|AB|$ .

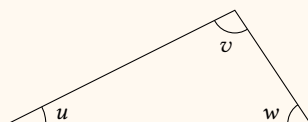
Det er her værd at bemærke at  $|AB| = |\vec{AB}|$ , altså at længden af siden  $AB$  er det samme som længden af vektoren fra  $A$  til  $B$ . Hvis man kender koordinaterne for de tre punkter  $A$ ,  $B$  og  $C$ , kan man altså beregne sidernes længder.

I en trekant er der tre vinkler. Størrelsen af disse kan også beregnes ud fra vektorer. Først vil vi dog se på nogle – forhåbentligt velkendte – egenskaber ved trekanter.

## Sætning 4.1

Summen af vinklerne i en trekant er  $180^\circ$ :

$$u + v + w = 180^\circ .$$



Fra hvert hjørne i en trekant kan man tegne følgende tre linjer:

**Medianen** som er en linje fra en vinkelspids til *midten* af den modstående side.

**Vinkelhalveringslinjen** som går fra en vinkelspids til den modstående side, sådan at den *halverer vinklen*.

**Højden** der går fra en vinkelspids *vinkelret* på den modstående side. Hvis trekanten er stumpvinklet,<sup>1</sup> kan højden ligge uden for trekanten.

Disse tre typer af linjer er illustreret på figur 4.1.

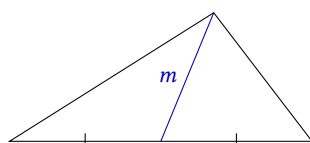
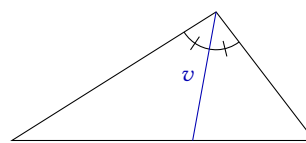
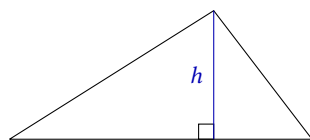
En højde står som sagt vinkelret på den modstående side. Den side som højden står vinkelret på, kalder man *grundlinjen*,<sup>2</sup> og den kan bruges sammen med højden til at beregne en trekants areal.

Der gælder følgende meget kendte sætning om sammenhængen mellem en trekants areal, dens højde og grundlinje:

<sup>1</sup>En trekant kaldes *stumpvinklet* hvis en af vinklerne er stump, dvs. større end  $90^\circ$ .

<sup>2</sup>Da en trekant har tre højder, så er der derfor heller ikke én grundlinje. Hvilken side man vælger at kalde grundlinje, afhænger af hvilken højde man vælger at se på.

**Figur 4.1:** Hvert hjørne i en trekant har tilknyttet en median, en vinkelhalveringslinje og en højde. Bemærk at en højde kan ligge uden for trekanten.

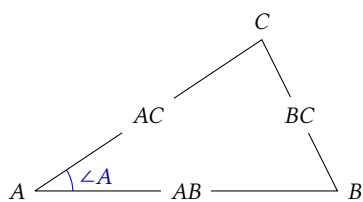
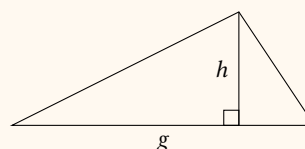
(a) Median  $m$ .(b) Vinkelhalveringslinje,  $v$ .(c) Højde,  $h$ .

(d) Højde der falder uden for trekanten.

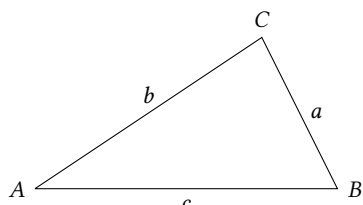
### Sætning 4.2

Arealet  $T$  af en trekant er det halve af en af højderne ganget med den længden af den tilhørende grundlinje:

$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g .$$



**Figur 4.2:** Sider og vinkler i  $\triangle ABC$ .



**Figur 4.3:**  $\triangle ABC$  hvor sidelængderne benævnes  $a$ ,  $b$  og  $c$ .

## 4.1 Notation

Når man skal tale om siderne og vinklerne i en trekant, er det vigtigt at man har en notation som entydigt forklarer hvad man taler om.

Man følger den konvention der er illustreret på figur 4.2: Den vinkel der ligger ved punktet  $A$ , kaldes  $\angle A$  osv., og siderne benævnes ved de punkter de går mellem.

Nogle gange benævner man også sidernes længder ud fra det punkt de ligger *overfor*. Længden af siden over for punkt  $A$  benævnes så med  $a$  osv., sådan at

$$a = |BC| , \quad b = |AC| , \quad c = |AB| .$$

Dette ses på figur 4.3.

Notationen hvor man bruger små bogstaver som navne til sidelængderne, duer i princippet kun hvis man har én trekant at kigge på. Hvis man har en mere kompliceret figur med flere punkter end tre, kan der nemlig være flere sider der kan siges at ligge over for et bestemt punkt – notationen med små bogstaver bliver da ikke længere entydig. I den situation vil det være fornuftigst skrive sidelængderne som  $|AB|$ ,  $|BC|$  osv.

Hvis man har en figur med mere end tre punkter, kan der også nogle gange opstå en situation hvor det ikke er entydigt at benævne en vinkel med ét bogstav, f.eks.  $\angle A$ . I disse situationer benævner man i stedet en vinkel vha.

3 bogstaver.  $\angle CAD$  er f.eks. den vinkel man får tegnet op når man tegner fra punkt  $C$  til punkt  $A$  til punkt  $D$  (se figur 4.4).

## 4.2 Ensvinklede trekanter

To trekanter hvor vinklerne er parvis lige store, kaldes *ensvinklede*, dvs.

### Definition 4.3

Hvis der for to trekanter  $ABC$  og  $A'B'C'$  gælder at

$$\angle A' = \angle A, \quad \angle B' = \angle B \quad \text{og} \quad \angle C' = \angle C,$$

så kaldes de to trekanter *ensvinklede*.

Hvis to trekanter er ensvinklede, vil den ene være en forstørret eller formindsket kopi af den anden. Der gælder følgende sætning.

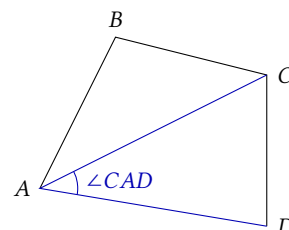
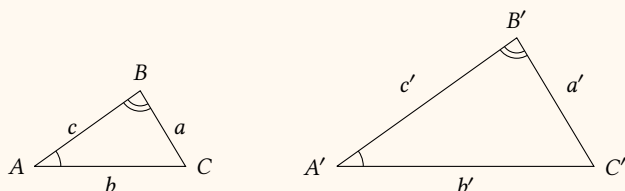
### Sætning 4.4

Hvis  $\triangle ABC$  og  $\triangle A'B'C'$  er ensvinklede med

$$\angle A' = \angle A, \quad \angle B' = \angle B \quad \text{og} \quad \angle C' = \angle C,$$

så er forholdet mellem længderne af de ensliggende<sup>3</sup> sider ens, dvs.

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$



**Figur 4.4:**  $\angle A$  kan være 3 forskellige vinkler på denne figur; derfor kalder man den markerede vinkel  $\angle CAD$ .

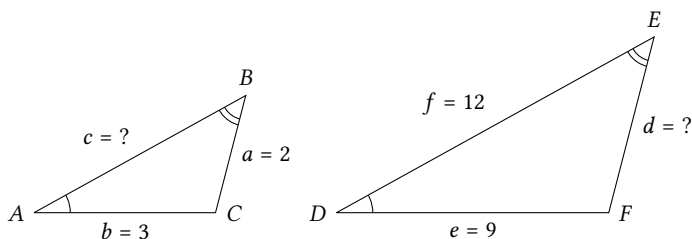
<sup>3</sup>To sider er *ensliggende* når de ligger mellem to ens vinkler.

**Eksempel 4.5** Hvis  $\triangle ABC$  og  $\triangle DEF$  er ensvinklede, sådan at

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \text{og} \quad \angle C = \angle F,$$

og man tillige ved at  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $e = 9$  og  $f = 12$ , så kan man beregne de resterende sidelængder.

Først tegner man en skitse (den behøver ikke være målfast) for at få et overblik:



Herefter ser man på forholdet mellem de ensliggende siders længder. I dette tilfælde er

$$\frac{d}{a} = \frac{e}{b} = \frac{f}{c}.$$

Indsætter man de kendte værdier, får man

$$\frac{d}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{c}.$$

Dvs.

$$\frac{d}{2} = \frac{9}{3} \iff d = \frac{9}{3} \cdot 2 = 6,$$

og

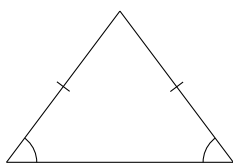
$$\frac{9}{3} = \frac{12}{c} \iff \frac{c}{12} = \frac{3}{9} \iff c = \frac{3}{9} \cdot 12 = 4.$$

Nu kender man altså alle sidelængderne i de to trekanter.

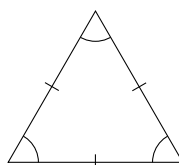
### 4.3 Retvinklede trekanter

Der findes tre typer af trekanter som det er vigtigt at kende navnene på. Det er *ligebenede* trekanter, *ligesidede* trekanter og *retvinklede* trekanter. Disse er illustreret på figur 4.5.

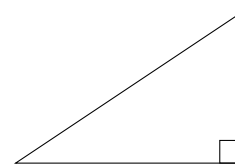
**Figur 4.5:** I en ligebenet trekant er to af siderne lige lange, i en ligesidet er alle sider lige lange, og i en retvinklet trekant er den ene vinkel ret.



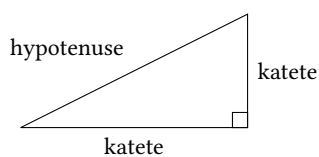
(a) En ligebenet trekant



(b) En ligesidet trekant.



(c) En retvinklet trekant.



**Figur 4.6:** Siderne i en retvinklet trekant.

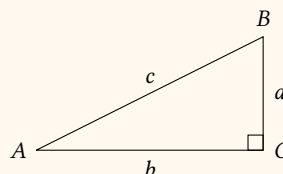
I en retvinklet trekant har siderne også specielle navne. Den side der ligger over for den rette vinkel, kaldes *hypotenusen*, mens de to andre sider kaldes *kateter* (se figur 4.6).

For retvinklede trekanter gælder der følgende sætning.

#### Sætning 4.6: Pythagoras' sætning

I en retvinklet trekant  $ABC$  hvor  $\angle C$  er den rette vinkel, gælder der at

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Hvis man i stedet for at referere til en konkret trekant  $ABC$  bruger de navne siderne i en retvinklet trekant har, kan Pythagoras' sætning også udtrykkes på følgende måde:



**Sætning 4.7: Pythagoras' sætning**

I en retvinklet trekant er summen af kvadraterne på kateterne lig kvadratet på hypotenusen,<sup>4</sup>dvs.

$$(\text{første katete})^2 + (\text{anden katete})^2 = (\text{hypotenusen})^2 .$$

<sup>4</sup>Kvadratet på ... betyder »opløftet i 2. potens«. Kvadratet på  $a$  betyder f.eks.  $a^2$ .

**Eksempel 4.8** Hvis man om en retvinklet trekant ved at den ene katete har længden 5, og hypotenusen har længden 13, kan man beregne længden af den sidste katete vha. Pythagoras' sætning.

Længden af den sidste katete kan man kalde  $x$ . Sætter man de oplyste værdier ind i Pythagoras' sætning, får man ligningen

$$5^2 + x^2 = 13^2 .$$

Dvs.

$$x^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 .$$

Længden af den sidste katete er så

$$x = \sqrt{144} = 12 .$$

Tegner man en vilkårlig retvinklet trekant, kan man se hypotenusen som en vektor  $\vec{c}$ . Dette kan sammenlignes med den samme retvinklede trekant hvor sidelængderne kaldes  $a$ ,  $b$  og  $c$  (se figur 4.7). Denne sammenligning giver de to ligninger

$$a = c \cdot \sin(\angle A) \quad \text{og} \quad b = c \cdot \cos(\angle A) .$$

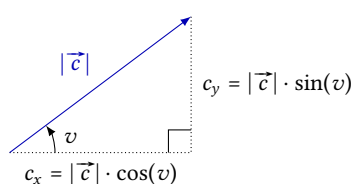
Disse kan omskrives til

$$\sin(\angle A) = \frac{a}{c} \quad \text{og} \quad \cos(\angle A) = \frac{b}{c} .$$

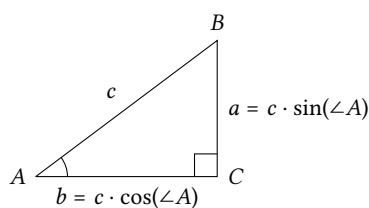
Ud fra dette kan man også finde en formel for  $\tan(\angle A)$  idet

$$\tan(\angle A) = \frac{\sin(\angle A)}{\cos(\angle A)} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} .$$

Alt dette kan opsummeres i følgende sætning:



(a) Vektor  $\vec{c}$  som hypotense.



(b) Sidelængder  $a$ ,  $b$  og  $c$ .

**Figur 4.7:** En vektor kan afbildes som hypotenusen i en retvinklet trekant. Heraf kan man udlede en sammenhæng mellem sidernes længder og hhv.  $\cos$  og  $\sin$  til vektorens retningsvinkel.

**Sætning 4.9**

I en retvinklet trekant  $ABC$  hvor  $\angle C$  er den rette vinkel, er

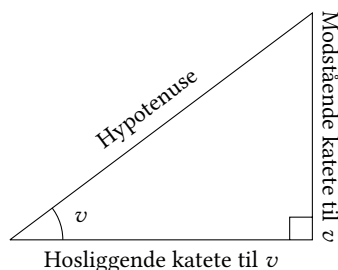
$$\sin(\angle A) = \frac{a}{c}, \quad \cos(\angle A) = \frac{b}{c} \quad \text{og} \quad \tan(\angle A) = \frac{a}{b}.$$

Nu er det jo ikke alle trekanter der hedder  $ABC$ . Sætning 4.9 skrives derfor også nogle gange op på følgende måde:

**Sætning 4.10**

I en retvinklet trekant hvor  $v$  er én af de spidse vinkler, er

$$\begin{aligned} \sin(v) &= \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}, \\ \cos(v) &= \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}, \\ \tan(v) &= \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}. \end{aligned}$$

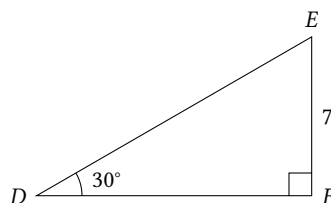


**Figur 4.8:** Sidernes navne i forhold til den spidse vinkel  $v$ .

Betegnelserne »modstående« og »hosliggende« katete henviser til om kateten ligger over for (modstående) eller op til (hosliggende) vinklen. Se også figur 4.8.

Vha. formlerne i sætning 4.10 er det muligt at beregne alle sider og vinkler i en retvinklet trekant hvis blot man kender mindst én side og enten en af de spidse vinkler eller en side mere.

**Eksempel 4.11** I en retvinklet trekant  $DEF$  er  $\angle D = 30^\circ$  og  $|EF| = 7$ . En skitse af trekanten ser således ud:



Siden  $EF$  er den modstående katete til  $\angle D$ , og  $DE$  er hypotenusen, så ifølge sætning 4.10 er

$$\sin(30^\circ) = \frac{7}{|DE|}.$$

Denne ligning løses, og man får

$$|DE| = \frac{7}{\sin(30^\circ)} = 14.$$

Den sidste side kan nu bestemmes vha. Pythagoras' sætning, og den sidste vinkel bestemmes ud fra at vinkelsummen i en trekant er  $180^\circ$ .

**Eksempel 4.12** Hvis man skal bestemme længden af kateten  $DF$  i trekanten fra eksempel 4.11, kan dette gøres ved at benytte tangens.

Siden  $DF$  er den hosliggende katete til  $\angle D$ , og  $EF$  er den modstående. Man får så ifølge sætning 4.10 at

$$\tan(30^\circ) = \frac{7}{|DF|} .$$

Løser man denne ligning, får man

$$|DF| = \frac{7}{\tan(30^\circ)} = 12,1 .$$

#### 4.4 Arealet af en trekant

I dette afsnit og det næste anvendes vektorgeometri til at udlede nogle sætninger om trekanter. Først ses på hvordan determinanten af to vektorer kan bruges til at bestemme en trekants areal.

Hvis en trekant har hjørner i punkterne  $A$ ,  $B$  og  $C$ , vil dens areal være halvdelen af arealet af det parallelogram der er udspændt af vektorerne  $\overrightarrow{AB}$  og  $\overrightarrow{AC}$ . Man kan derfor ud fra sætning 3.18 komme frem til følgende sætning, der omhandler arealet af trekanter:

##### Sætning 4.13

Trekanten med hjørner i punkterne  $A$ ,  $B$  og  $C$  har arealet

$$T = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right| .$$

**Eksempel 4.14** En trekant har hjørner i punkterne  $A(-1, 3)$ ,  $B(0, 5)$  og  $C(7, 2)$ . Arealet af denne trekant kan bestemmes vha. sætning 4.13.

Først beregnes koordinaterne til vektorerne  $\overrightarrow{AB}$  og  $\overrightarrow{AC}$ . Man får

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 0 - (-1) \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 7 - (-1) \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Arealet af trekant  $ABC$  kan nu beregnes:

$$T = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |1 \cdot (-1) - 2 \cdot 8| = \frac{1}{2} |-17| = \frac{17}{2} .$$

Arealet af trekant  $ABC$  er altså  $\frac{17}{2}$ .

Sætning 4.13 giver i kombination med sætning 3.21 at arealet af en trekant  $ABC$  er

$$T = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right| = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \right| \left| \overrightarrow{AC} \right| |\sin(v)| , \quad (4.1)$$

hvor  $v$  er vinklen fra  $\overrightarrow{AB}$  til  $\overrightarrow{AC}$ . Hvis trekantens sidelængder kaldes  $a$ ,  $b$  og  $c$ , kan (4.1) omskrives til følgende sætning:

**Sætning 4.15**

Arealet af trekanten  $ABC$  er givet ved

$$T = \frac{1}{2} b c \sin(\angle A) .$$

Formlen i sætning 4.15 siger at en trekants areal kan beregnes ud fra to sider og den mellemliggende vinkel. Formlen kan derfor skrives på 3 forskellige måder, afhængig af hvilken vinkel, man tager udgangspunkt i:

$$T = \frac{1}{2} b c \sin(\angle A)$$

$$T = \frac{1}{2} a c \sin(\angle B)$$

$$T = \frac{1}{2} a b \sin(\angle C)$$

**4.5 Sinusrelationerne**

Vha. sætning 4.15 kan man udlede følgende sætning.

**Sætning 4.16: Sinusrelationerne**

I en trekant  $ABC$  gælder der

$$\frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle C)}{c} ,$$

og

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} .$$

**Bevis**

Som nævnt ovenfor kan formelen i sætning 4.15 skrives som tre formler for arealet af den samme trekant. Der må derfor gælde at

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\angle A) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\angle B) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\angle C) .$$

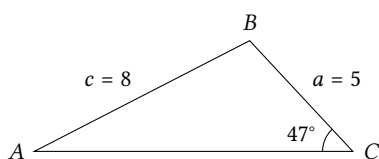
I denne dobbeltligning kan man dividere med  $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c$  på alle »sider«, og man får så

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\angle A)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\angle B)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\angle C)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c} .$$

Nu forkorter man så meget som muligt, og tilbage står der

$$\frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle C)}{c}$$

hvorved sætningen er bevist. ■



**Figur 4.9:** En trekant med to kendte sider og én kendt vinkel.

Sinusrelationerne siger at forholdet mellem sinus til en vinkel og længden af den side der ligger over for vinklen, er konstant i en given trekant. Hvis man kender en vinkel og en længden af siden overfor i en trekant, og man kender en vinkel eller en sidelængde mere, er det derfor muligt at beregne resten af sidelængderne og vinklerne i trekanten.

**Eksempel 4.17** I  $\triangle ABC$  er  $\angle C = 47^\circ$ ,  $a = 5$  og  $c = 8$ . En skitse af trekanten kan ses på figur 4.9.

Iflg. sinusrelationerne (sætning 4.16) er

$$\frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{\sin(\angle C)}{c},$$

dvs.

$$\frac{\sin(\angle A)}{5} = \frac{\sin(47^\circ)}{8} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\angle A) = \frac{\sin(47^\circ)}{8} \cdot 5 = 0,4571.$$

Derfor er

$$\angle A = \sin^{-1}(0,4571) = 27,2^\circ.$$

Vinklen  $\angle B$  kan nu bestemmes ud fra at vinkelsummen er  $180^\circ$ , og den sidste side kan så også bestemmes vha. sinusrelationerne (se evt. næste eksempel).

**Eksempel 4.18** I  $\triangle ABC$  er  $\angle A = 62^\circ$ ,  $\angle B = 34^\circ$  og  $b = 7$ . En skitse kan ses på figur 4.10.

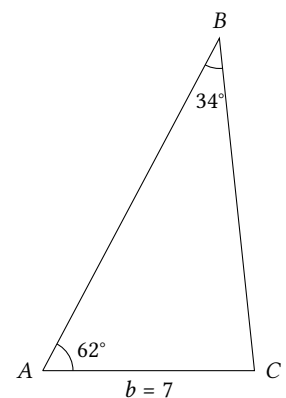
Ifølge sinusrelationerne er

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)},$$

dvs.

$$\frac{a}{\sin(62^\circ)} = \frac{7}{\sin(34^\circ)} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{7}{\sin(34^\circ)} \cdot \sin(62^\circ) = 11,1.$$

Den sidste vinkel kan beregnes ud fra at vinkelsummen er  $180^\circ$ , og den sidste side kan bestemmes på samme måde som siden  $a$ .



**Figur 4.10:** En trekant med to kendte vinkler og én kendt side.

### Sinusfælden

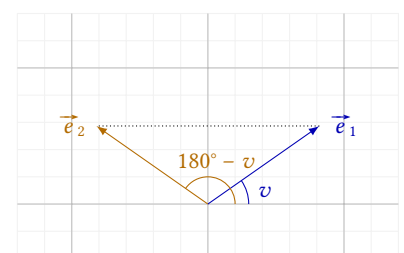
Det viser sig at man skal være en smule påpasselig når man bestemmer vinkler vha. sinusrelationerne. Funktionen  $\sin^{-1}$  som man bruger til at isolere vinkler med, giver nemlig altid et resultat mellem  $-90^\circ$  og  $90^\circ$ ; men i en trekant kan en vinkel være op til  $180^\circ$  – og det viser sig at for en given sinus-værdi findes der to vinkler der kan give denne værdi.

Figur 4.11 viser enhedsvektoren  $\vec{e}_1$  med retningsvinkel  $v$  og enhedsvektoren  $\vec{e}_2$  med retningsvinkel  $180^\circ - v$ . Figuren viser at de to enhedsvektorer har samme andenkoordinat, dvs.

$$\sin(180^\circ - v) = \sin(v).$$

Ud fra dette kan man argumentere for at når man har ligningen  $\sin(v) = y$ , så kan der være to løsninger. De to løsninger er

$$v = \sin^{-1}(y) \quad \text{og} \quad v = 180^\circ - \sin^{-1}(y).$$



**Figur 4.11:** To vinkler med samme sinus.



**Eksempel 4.19** I trekant  $ABC$  er  $\angle A = 56^\circ$ ,  $a = 7$  og  $b = 8$ . Vha. sinusrelationerne kan man beregne  $\angle B$  idet

$$\frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle A)}{a} .$$

Dette giver ligningen

$$\frac{\sin(\angle B)}{8} = \frac{\sin(56^\circ)}{7} \iff \sin(\angle B) = \frac{\sin(56^\circ)}{7} \cdot 8 = 0,9475 .$$

<sup>5</sup>Der findes to løsninger til en ligning som  $\sin(\angle B) = 0,9475$ , netop fordi  $\sin(71,3^\circ) = \sin(108,7^\circ)$  så begge disse vinkler løser ligningen.

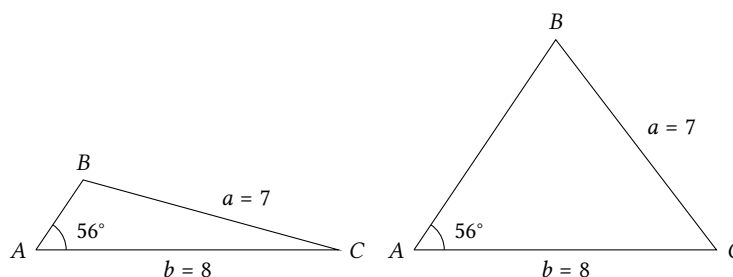
Denne ligning har to løsninger, den ene er<sup>5</sup>

$$\angle B = \sin^{-1}(0,9475) = 71,3^\circ ,$$

og den anden er

$$\angle B = 180^\circ - \sin^{-1}(0,9475) = 108,7^\circ .$$

Trekant  $ABC$  kan altså se ud på to forskellige måder:



Hvis man bliver bedt om at bestemme de resterende sider og vinkler i  $\triangle ABC$  bliver man altså nødt til at regne på to forskellige trekanter. Der findes derfor ikke én men to løsninger, og den ene er ikke mere rigtig end den anden.

Selvom ligningen  $\sin(v) = y$  altid har to løsninger, er det ikke sikkert at begge løsninger giver mening. Dette ses i næste eksempel.

**Eksempel 4.20** Her ses på trekanten  $ABC$ , hvor  $\angle A = 45^\circ$ ,  $a = 15$  og  $b = 12$ . Sinusrelationerne giver

$$\frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle A)}{a}$$

hvorfra man får ligningen

$$\frac{\sin(\angle B)}{12} = \frac{\sin(45^\circ)}{15} \iff \sin(\angle B) = \frac{\sin(45^\circ)}{15} \cdot 12 = 0,5657 .$$

Denne ligning har to løsninger,

$$\angle B = \sin^{-1}(0,5657) = 34,4^\circ$$

og

$$\angle B = 180^\circ - \sin^{-1}(0,5657) = 145,6^\circ .$$

Den sidste løsning ( $\angle B = 145,6^\circ$ ) er godt nok en løsning til ligningen  $\sin(\angle B) = 0,5657$ , men det er ikke en løsning der giver mening. Vinkelsummen i en trekant er nemlig  $180^\circ$ , og der er i forvejen en vinkel på  $45^\circ$ . Så kan der ikke også være en vinkel på  $145,6^\circ$  i trekanten, og denne løsning kasseres derfor.

Altså er der kun én mulig størrelse vinklen kan have, nemlig  $\angle B = 34,4^\circ$ .

## 4.6 Cosinusrelationerne

Sinusrelationerne kan bruges i de tilfælde hvor man kender en vinkel og en side der ligger over for hinanden. Gør man ikke det, kan man kun beregne yderligere sidelængder og vinkler ved at benytte *cosinusrelationerne*.

### Sætning 4.21: Cosinusrelationerne

I en trekant  $ABC$  gælder der at

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\angle A) & \cos(\angle A) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\angle B) & \cos(\angle B) &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\angle C) & \cos(\angle C) &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \end{aligned}$$

Formlerne på højre side i sætning 4.21 er blot en omskrivning af formlerne på venstre side.

Hvis man ser nærmere på formlerne på venstre side, bemærker man at alle tre formler gør det muligt at beregne en sidelængde hvis man kender vinklen overfor og længden af de to andre sider. Indholdet i alle tre formler er altså på sin vis det samme, så det er kun nødvendigt at bevise den ene af dem.

#### Bevis

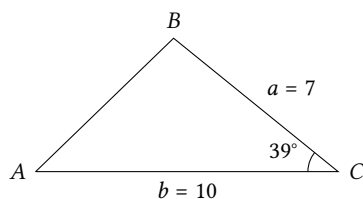
Trekanten  $ABC$  er udspændt af vektorerne  $\vec{AB}$  og  $\vec{AC}$ . Der gælder tillige (pga. indskudssætningen) at

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AC} - \vec{AB}.$$

Idet  $a^2 = |\vec{BC}|^2$ , kan man finde et udtryk for  $a^2$  ved at regne på vektoren  $\vec{BC}$ . Hvis man anvender regnereglerne fra sætning 3.3 og sætning 3.4, får man

$$\begin{aligned} |\vec{BC}|^2 &= |\vec{AC} - \vec{AB}|^2 = (\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) \\ &= |\vec{AC}|^2 + |\vec{AB}|^2 - 2 \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AB} \\ &= |\vec{AC}|^2 + |\vec{AB}|^2 - 2 \cdot |\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos(\angle A) \\ &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\angle A) \end{aligned}$$

hvorved sætningen er bevist. ■



**Figur 4.12:** Trekant hvor man kender to sider og en mellemliggende vinkel.

Cosinusrelationerne kan bruges til at beregne en længde af en side hvis man kender de to andre sidelængder i en trekant samt vinklen overfor. Dette svarer til formlerne på venstre side i sætning 4.21.

Alternativt kan man bruge cosinusrelationerne til at beregne en vinkel hvis man kender længden af alle tre sider i en trekant – dette svarer til formlerne på højre side i sætningen.

**Eksempel 4.22** I trekant  $ABC$  er  $\angle C = 39^\circ$ ,  $a = 7$  og  $b = 10$ . En skitse af trekanten kan ses på figur 4.12.

Sidelængden  $c$  kan beregnes vha. en cosinusrelation. Iflg. sætning 4.21 er

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\angle C) = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos(39^\circ) = 40,20$$

hvilket betyder at

$$c = \sqrt{40,20} = 6,3 .$$

Da man nu kender længden af alle siderne, kan én af de sidste to vinkler også bestemmes vha. en cosinusrelation (se næste eksempel). Alternativt kan man bestemme en af de sidste to vinkler vha. sinusrelationerne.

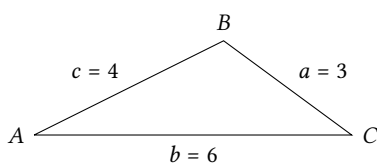
**Eksempel 4.23** I dette eksempel ses på en trekant  $ABC$ , hvor  $a = 3$ ,  $b = 6$  og  $c = 4$  (se figur 4.13). Iflg. cosinusrelationerne kan  $\angle A$  beregnes ud fra formlen

$$\cos(\angle A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6^2 + 4^2 - 3^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = 0,8958 .$$

Heraf får man

$$\angle A = \cos^{-1}(0,8958) = 26,4^\circ .$$

De resterende vinkler kan beregnes på samme måde.



**Figur 4.13:** Trekant, hvor man kender alle sider.

## 4.7 Øvelser

### Øvelse 4.1

Bestem arealet af trekanten  $PQR$ , når  $|PQ| = 6$  og  $h_R = 3$ . De to trekanter på figuren er ensvinklede.

### Øvelse 4.2

Arealet af trekant  $ABC$  er 28, og  $h_C = 7$ .

- a) Beregn  $|AB|$ .

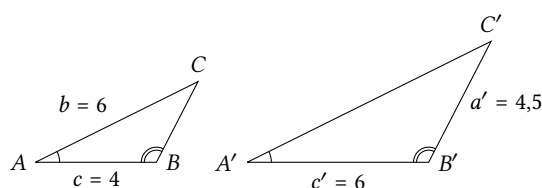
### Øvelse 4.3

Arealet af trekant  $ABC$  er 12, og  $|BC| = 6$ .

- a) Bestem højden  $h_A$ .

### Øvelse 4.4

De to trekanter på figuren er ensvinklede.



- a) Bestem sidelængderne  $a$  og  $b'$ .



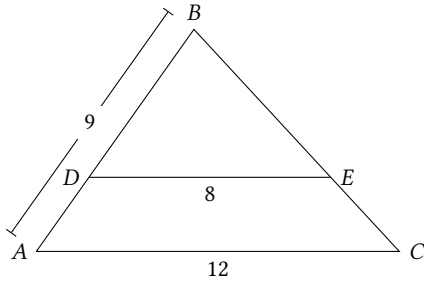
**Øvelse 4.5**

De to trekanter  $ABC$  og  $DEF$  er ensvinklede, således at  $\angle A = \angle D$  og  $\angle B = \angle E$ . Der gælder yderligere, at  $a = 5$ ,  $b = 7$ ,  $e = 15$  og  $f = 18$ .

- a) Bestem de manglende sidelængder.

**Øvelse 4.6**

På figuren nedenfor er  $AC$  og  $DE$  parallelle. Nogle af målene er angivet på figuren.



- a) Bestem  $|AD|$ .

**Øvelse 4.7**

Trekant  $ABC$  er retvinklet, og  $\angle C$  er den rette vinkel.

- a) Bestem  $c$ , når  $a = 3$  og  $b = 4$ .  
b) Bestem  $a$ , når  $b = 5$  og  $c = 13$ .

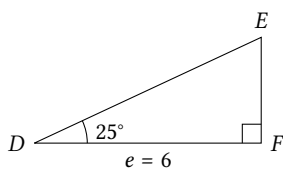
**Øvelse 4.8**

Trekant  $BLT$  er retvinklet, og  $\angle L$  er den rette vinkel.

- a) Opskriv Pythagoras' sætning for denne trekant.  
b) Bestem  $b$ , når  $l = 4,3$  og  $t = 2,9$ .

**Øvelse 4.9**

Den retvinklede trekant  $DEF$  er afbildet nedenfor. Nogle af trekantens mål kan ses på figuren.



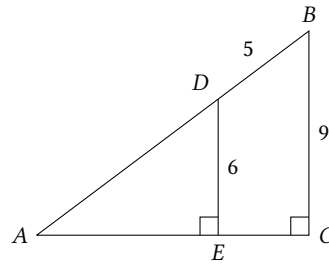
- a) Bestem den manglende vinkel og de manglende sidelængder i trekant  $DEF$ .  
b) Bestem trekantens areal.

**Øvelse 4.10**

Bestem de manglende vinkler samt længden af den sidste katete i en retvinklet trekant hvor længden af den ene katete er 3, og længden af hypotenusen er 7.

**Øvelse 4.11**

På figuren nedenfor er  $|DE| = 6$ ,  $|BC| = 9$  og  $|BD| = 5$ .



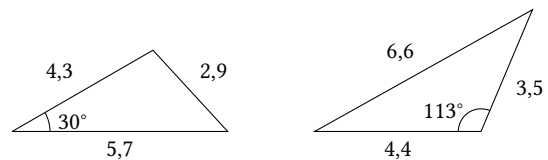
- a) Bestem  $|AD|$  og  $|AE|$ .  
b) Bestem  $\angle A$  og  $\angle B$ .

**Øvelse 4.12**

Bestem arealet af trekant  $ABC$  når  $a = 3$ ,  $b = 5$  og  $\angle C = 72^\circ$ .

**Øvelse 4.13**

Bestem arealerne af trekanterne herunder.

**Øvelse 4.14**

I trekant  $ABC$  er  $\angle A = 26^\circ$ ,  $\angle B = 95^\circ$  og  $|BC| = 4,0$ .

- a) Bestem de manglende sider og den manglende vinkel i trekanten.  
b) Bestem arealet af trekanten.

**Øvelse 4.15**

Bestem de manglende størrelser i trekant  $ABC$  i de fire tilfælde herunder. Husk i hvert tilfælde at overveje om der er mere end én løsning.

- a)  $\angle A = 34^\circ$ ,  $a = 10$ ,  $b = 5$ .  
b)  $\angle B = 69^\circ$ ,  $\angle C = 71^\circ$ ,  $a = 4,7$ .  
c)  $\angle B = 106^\circ$ ,  $b = 5$ ,  $c = 6,2$ .  
d)  $\angle A = 62^\circ$ ,  $\angle B = 79^\circ$ ,  $c = 8,3$ .

**Øvelse 4.16**

I trekant  $ABC$  er  $\angle A = 32^\circ$ ,  $c = 4,7$ , og medianen fra  $B$  har længden  $m_B = 6,1$ .

- a) Bestem  $b$ .  
b) Bestem trekantens areal.

**Øvelse 4.17**

Bestem de manglende vinkler og sider i trekant  $ABC$  i de fire tilfælde herunder.

- a)  $a = 5, b = 7, \angle C = 49^\circ$ .
- b)  $a = 3, b = 2, c = 4$ .
- c)  $b = 4, c = 7, \angle A = 112^\circ$ .
- d)  $a = 9, b = 5, c = 7$ .

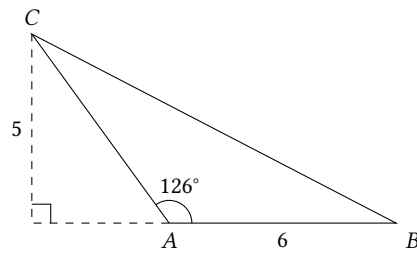
**Øvelse 4.18**

Trekant  $ABC$  har hjørner i punkterne  $A(-2, 3)$ ,  $B(0, 7)$  og  $C(4, 1)$ .

- a) Bestem sidelængderne og vinklerne i trekanten.
- b) Bestem trekantens areal.
- c) Bestem højden  $h_C$  fra  $C$  på siden  $AB$ .

**Øvelse 4.19**

I trekant  $ABC$  er  $\angle A = 126^\circ$ ,  $|AB| = 6$  og højden fra  $C$  er  $h_C = 5$ .



- a) Bestem trekantens areal.
- b) Bestem længden af  $AC$ .
- c) Bestem  $|BC|$  samt  $\angle B$  og  $\angle C$ .

# Linjer

# 5

I dette kapitel ses på linjer i planen. Vha. punkter og vektorer kan man udlede ligninger for de punkter, der ligger på en linje. Det er nyttigt at kunne tale om *afstanden* mellem to punkter i et koordinatsystem. Der gælder følgende sætning:

## Sætning 5.1

Afstanden mellem punkterne  $A(x_1, y_1)$  og  $B(x_2, y_2)$  er

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

## Bevis

Afstanden fra  $A$  til  $B$  er lig med længden af vektoren  $\vec{AB}$ , dvs.

$$|AB| = |\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad \blacksquare$$

Sætningen kan også bevises ved at betragte linjen  $AB$  som hypotenusen i en retvinklet trekant, og derefter anvende Pythagoras' sætning. Se figur 5.1.

## 5.1 Linjens parameterfremstilling

En linje i et koordinatsystem kan beskrives ud fra et punkt på linjen og den retning linjen har i koordinatsystemet. Når man skal beskrive en linjes retning, kan dette gøres vha. en vektor.

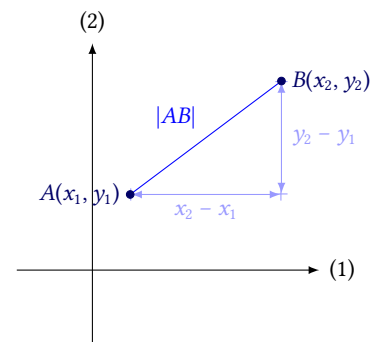
### Definition 5.2

En vektor  $\vec{r}$  der er parallel med en linje  $l$ , kaldes en *retningsvektor* for  $l$ .

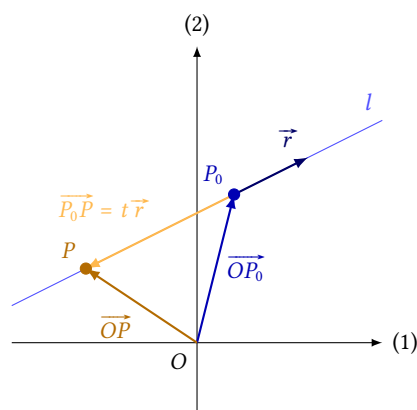
En vektor  $\vec{n}$  der står vinkelret på en linje  $l$ , kaldes en *normalvektor* for  $l$ .

Det er her vigtigt at bemærke at en linje ikke har én retningsvektor, men uendeligt mange. Hvis  $\vec{r}$  er en retningsvektor, så vil enhver vektor der er parallel med  $\vec{r}$ , nemlig også være en retningsvektor. Det samme gælder for en normalvektor.

Når man skal beskrive linjen er det ligeledes ligegyldigt hvilket punkt man starter med. En linje indeholder uendeligt mange punkter, og ethvert af disse koblet med en retningsvektor kan bruges til at beskrive linjen.



Figur 5.1: Afstanden mellem to punkter kan findes vha. Pythagoras' sætning.



**Figur 5.2:** Ud fra denne figur kan man udlede en sammenhæng mellem et tilfældigt punkt  $P$  på linjen, det kendte punkt  $P_0$  og retningsvektoren  $\vec{r}$ .



Har man et punkt og en retningsvektor for en linje, kan linjen beskrives ved en såkaldt *parameterfremstilling* som er en ligning der fortæller hvordan ethvert punkt på linjen kan beregnes ud fra et startpunkt og en retningsvektor.

På figur 5.2 ses en linje  $l$ , et punkt  $P_0(x_0, y_0)$  på linjen og en retningsvektor  $\vec{r}$  for linjen. På figuren er der også indtegnet et tilfældigt punkt  $P(x, y)$  på linjen. Ifølge indskudssætningen (sætning 1.13) gælder der

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}.$$

Dette kan også ses på figuren.

Men vektoren  $\overrightarrow{P_0P}$  er parallel med  $\vec{r}$ , dvs. der findes et tal  $t$  så  $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{r}$ . Altså får man ligningen

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{r}.$$

$\overrightarrow{OP}$  og  $\overrightarrow{OP_0}$  er stedvektorerne til de to punkter  $P(x, y)$  og  $P_0(x_0, y_0)$  så det er vektorer der har samme koordinater som de to punkter. Dvs. man kan sætte dette ind i ligningen og få

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\vec{r}. \quad (5.1)$$

Ethvert punkt  $P(x, y)$  på linjen kan findes ud fra denne ligning for en eller anden værdi af  $t$ . Lader man nu  $t$  gennemløbe alle de reelle tal, får man alle punkterne på linjen. En ligning af typen (5.1) hvor  $t \in \mathbb{R}$ , kaldes en *parameterfremstilling* for linjen  $l$ . Tallet  $t$  der gennemløber de reelle tal, kaldes *parameteren*. Der gælder altså

### Sætning 5.3

En *parameterfremstilling* for en linje i planen er givet ved

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

hvor  $(x_0, y_0)$  er et punkt på linjen, og  $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$  er en retningsvektor for linjen.

**Eksempel 5.4** Hvis en linje  $l$  går gennem punktet  $(3, 2)$  og har en retningsvektor  $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ , så er dens parameterfremstilling

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Eksempel 5.5** Her findes en parameterfremstilling for den linje  $m$  der går gennem de to punkter  $A(3, 4)$  og  $B(-2, 6)$ .

For at kunne opskrive en parameterfremstilling, skal man bruge en retningsvektor. Da både  $A$  og  $B$  ligger på linjen, kan  $\overrightarrow{AB}$  bruges som retningsvektor.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 - 3 \\ 6 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Man skal tillige bruge et punkt linjen går igennem. Her er det oplagt at vælge enten  $A$  eller  $B$ . Bruger man  $A$ , bliver parameterfremstillingen

$$m : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Punkterne  $A$  og  $B$ , linjen  $m$  og retningsvektoren  $\overrightarrow{AB}$  kan ses på figur 5.3.

Idet  $m$  går igennem uendeligt mange punkter og har uendeligt mange retningsvektorer (alle vektorer der er parallelle med  $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ), er f.eks.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

også parameterfremstillinger for  $m$ .

En parameterfremstilling er i virkeligheden en vektor-ligning hvor koordinaterne til retningsvektoren  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  er funktioner af parameteren  $t$ . Det betyder at man ud fra parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kan finde de to *koordinatfunktioner*  $x(t)$  og  $y(t)$  givet ved

$$x(t) = x_0 + r_x t \quad \text{og} \quad y(t) = y_0 + r_y t.$$

De to funktioner viser hvordan punktets  $x$ - og  $y$ -koordinat ændrer sig som funktion af parameteren  $t$ .

Parameteren  $t$  i en parameterfremstilling fortolkes derfor ofte som en tid. Dvs. efterhånden som tiden  $t$  går, bevæger punktet  $(x(t), y(t))$  sig langs den kurve som parameterfremstillingen angiver.<sup>1</sup>

Hvis to linjer ikke er parallelle, har de et skæringspunkt. Koordinatfunktionerne kan her bruges til at bestemme skæringspunktet mellem to linjer.

**Eksempel 5.6** To linjer er givet ved parameterfremstillingerne<sup>2</sup>

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

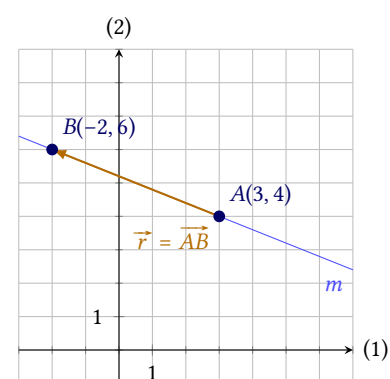
$$m : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

For linjen  $l$  er koordinatfunktionerne derfor

$$x_l = 3 + t \cdot (-1) \quad \text{og} \quad y_l = -3 + t \cdot 6,$$

og for  $m$  får man

$$x_m = -4 + s \cdot (5) \quad \text{og} \quad y_m = 1 + s \cdot 8.$$



Figur 5.3: Punkterne  $A$  og  $B$  samt linjen  $m$ .

<sup>1</sup>Det er ikke kun linjer der har parameterfremstillinger. Der kan stilles parameterfremstillinger op for uendeligt mange forskellige kurver i et koordinatsystem, f.eks. cirkler eller parabler.

<sup>2</sup>Når man opstiller flere parameterfremstillinger, er det vigtigt at parametrene kaldes noget forskelligt da det ikke drejer sig om den samme variabel.

For at finde skæringspunktet skal man finde den værdi af  $t$  og den værdi af  $s$  der giver samme punkt når man sætter dem ind i ligningerne. Dvs. de værdier for  $t$  og  $s$  hvor  $x_l = x_m$  og  $y_l = y_m$ . Det giver to ligninger med to ubekendte:

$$\begin{aligned} 3 - t &= -4 + 5s & (5.2) \\ -3 + 6t &= 1 + 8s . \end{aligned}$$

Disse to ligninger kan løses vha. lige store koefficienters metode. Forlænger man den øverste ligning med 6, får man

$$\begin{aligned} 18 - 6t &= -24 + 30s \\ -3 + 6t &= 1 + 8s . \end{aligned}$$

Lægger man disse to ligninger sammen, forsvinder parameteren  $t$ ; man får nemlig

$$15 = -23 + 38s \quad \Leftrightarrow \quad s = 1 .$$

Da man nu kender parameteren  $s$ , kan skæringspunktet beregnes ud fra parameterfremstillingen for  $m$ . Sætter man  $s = 1$  i parameterfremstillingen, får man

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} .$$

Altså skærer de to linjer hinanden i  $(1, 9)$ .

Hvis man vil bekræfte denne beregning, kan man beregne værdien af parameteren  $t$ , f.eks. vha. ligningen (5.2). Sætter man  $s = 1$  ind i denne ligning, får man

$$3 - t = -4 + 5 \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = 2 .$$

Når man sætter  $t = 2$  ind i parameterfremstillingen for  $l$ , får man

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

hvilket blot bekræfter at de to linjer skærer hinanden i  $(1, 9)$ .

## 5.2 Linjens ligning

Som bekendt kan linjer også beskrives ved ligninger. En parameterfremstilling for en linje kan derfor altid omskrives til en ligning for linjen. Antag f.eks. at en given linje  $l$  har parameterfremstillingen

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \vec{r} , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Så kan parameterfremstillingen omskrives til

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = t \vec{r} . \quad (5.3)$$

Tværvektoren  $\widehat{\vec{r}}$  til retningsvektoren  $\vec{r}$  står vinkelret på linjen. Den er derfor en normalvektor for linjen. Koordinaterne til denne normalvektor

kan findes ud fra  $\vec{r}$ 's koordinater. Nedenfor kaldes koordinaterne blot  $a$  og  $b$ , dvs.  $\hat{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

Hvis man tager skalarproduktet med denne vektor på begge sider af ligningen (5.3), får man

$$\hat{r} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \hat{r} \cdot t \vec{r},$$

men fordi  $\hat{r} \perp \vec{r}$ , giver højre side 0, dvs. man får

$$\begin{aligned} \hat{r} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} &= 0 \iff \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} &= 0 \iff \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) &= 0. \end{aligned}$$

Der gælder altså følgende sætning:

### Sætning 5.7

En linje som går gennem punktet  $(x_0, y_0)$  og har normalvektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , kan beskrives ved ligningen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

der også kan skrives

$$ax + by + c = 0$$

hvor  $c = -ax_0 - by_0$ .

**Eksempel 5.8** Linjen gennem  $(3, 1)$  som har normalvektoren  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ , har ligningen

$$\begin{aligned} 5(x - 3) + (-2)(y - 1) &= 0 \iff \\ 5x - 15 - 2y + 2 &= 0 \iff \\ 5x - 2y - 13 &= 0. \end{aligned}$$

**Eksempel 5.9** Linjen med parameterfremstillingen

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kan omskrives til en ligning ved først at finde en normalvektor. Her tages tværvektoren til linjens retningsvektor, dvs.

$$\vec{n} = \widehat{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -(-3) \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Linjen går gennem punktet  $(-1, 5)$ . Linjens ligning er derfor

$$l : 3(x - (-1)) + 4(y - 5) = 0,$$

som kan reduceres til

$$l : 3x + 4y - 17 = 0.$$

Det er vigtigt at bemærke at tallet  $a$  som optræder i ligningen  $ax + by + c = 0$ , ikke er en hældningskoefficient. Hvis  $b \neq 0$  kan linjens ligning dog omskrives

$$ax + by + c = 0 \iff y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

dvs. linjens hældningskoefficient er  $-\frac{a}{b}$ . Hvis  $b = 0$  kan denne omskrivning ikke lade sig gøre fordi man som bekendt ikke kan dividere med 0. Er  $b = 0$  har linjens ligning formen

$$ax + c = 0 \iff x = -\frac{c}{a},$$

dvs. linjen er parallel med andenaksen (altså »lodret«).

Formen  $ax + by + c = 0$  kan altså beskrive *enhver* linje i et koordinatsystem, også de lodrette – hvilket man ikke kan med en ligning på formen  $y = \alpha x + \beta$ ,<sup>3</sup>

Ud fra ovenstående argument får man sætningen

### Sætning 5.10

Hvis en linje er givet ved ligningen

$$ax + by + c = 0,$$

hvor  $b \neq 0$ , kan den omskrives til

$$y = \alpha x + \beta$$

hvor  $\alpha = -\frac{a}{b}$  er hældningskoefficienten, og  $\beta = -\frac{c}{b}$  er skæringen med andenaksen.

Hvis  $b = 0$ , er linjen parallel med andenaksen, og ligningen kan ikke omskrives til denne form.

Vha. en omskrivning mellem de to former for linjens ligning kan man komme frem til følgende sætning om ortogonale linjer:

### Sætning 5.11

De to linjer  $l$  og  $m$  med ligningerne

$$l : y = \alpha_1 x + \beta_1$$

$$m : y = \alpha_2 x + \beta_2$$

er ortogonale netop når  $\alpha_1 \alpha_2 = -1$ .

### Bevis

De to ligninger omskrives til formen  $ax + by + c = 0$ :

$$l : \alpha_1 x - y + \beta_1 = 0$$

$$m : \alpha_2 x - y + \beta_2 = 0.$$

Det ses nu at normalvektorerne for de to linjer er

$$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{n}_m = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

<sup>3</sup>Linjens hældningskoefficient og skæring med andenaksen kaldes her  $\alpha$  og  $\beta$  for at de ikke skal forveksles med konstanterne  $a$  og  $b$  i ligningen  $ax + bx + c = 0$ .



Hvis de to linjer er ortogonale, så er deres normalvektorer også ortogonale (se figur 5.4), dvs.

$$\begin{aligned}\vec{n}_l \cdot \vec{n}_m &= 0 && \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -1 \end{pmatrix} &= 0 && \Leftrightarrow \\ \alpha_1 \alpha_2 + (-1) \cdot (-1) &= 0 && \Leftrightarrow \\ \alpha_1 \alpha_2 + 1 &= 0 && \Leftrightarrow \\ \alpha_1 \alpha_2 &= -1 .\end{aligned}$$

Hvis man omvendt ved at  $\alpha_1 \alpha_2 = -1$ , kan man udføre ovenstående omskrivning baglæns og nå frem til at normalvektorerne er ortogonale, og så er linjerne det også. ■

**Eksempel 5.12** Her bestemmes den linje  $m$  gennem  $(8, 1)$  der står vinkelret på linjen

$$l : y = -4x + 3 .$$

Hvis de to linjer er ortogonale, så er produktet af deres hældningskoefficienter  $-1$ . Kaldes hældningskoefficienten for  $m$  for  $\alpha$ , så gælder der altså

$$\alpha \cdot (-4) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{4} .$$

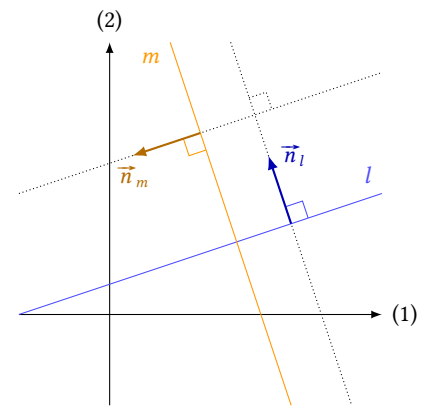
Da linjen  $m$  går gennem punktet  $(8, 1)$ , har linjen derfor ligningen

$$y = \frac{1}{4}(x - 8) + 1$$

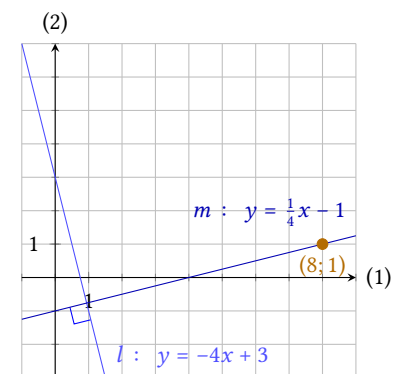
som reduceres til

$$m : y = \frac{1}{4}x - 1 .$$

De to linjer og punktet kan ses på figur 5.5.



Figur 5.4: Hvis to linjer er ortogonale, så er deres normalvektorer også ortogonale.



Figur 5.5: De to linjer  $l$  og  $m$  er ortogonale.

### 5.3 Afstanden fra et punkt til en linje

Hvis man har en linje i planen og et punkt der ikke ligger på linjen, kan det være nyttigt at beregne hvor langt punktet ligger fra linjen. Afstanden måles her altid som den *korteste* afstand fra punktet til linjen. Der gælder da følgende sætning:

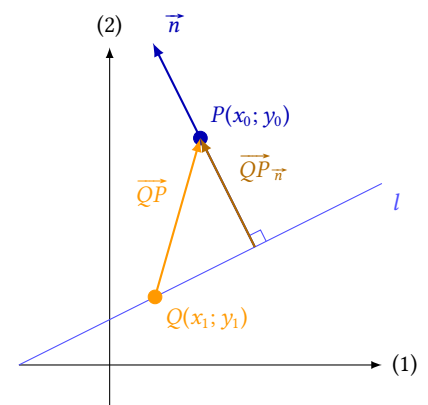
#### Sætning 5.13

Afstanden fra punktet  $P(x_0, y_0)$  til linjen  $l : ax + by + c = 0$  er

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

#### Bevis

På figur 5.6 ses linjen  $l$  og punktet  $P$ . Samtidig er der indtegnet en normalvektor  $\vec{n}$  og et tilfældigt punkt  $Q(x_1, y_1)$  på linjen.



Figur 5.6: Afstanden fra punktet til linjen kan findes som længden af vektoren  $\overrightarrow{QP}$ .

Hvis man projicerer vektoren  $\overrightarrow{QP}$  på normalvektoren  $\vec{n}$ , får man en vektor  $\overrightarrow{QP}_{\vec{n}}$  hvis længde er den søgte afstand. Vha. sætning 3.9 kan man nu beregne længden af denne vektor. Man får

$$\text{dist}(P, l) = \left| \overrightarrow{QP}_{\vec{n}} \right| = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}. \quad (5.4)$$

Fordi linjen har ligningen  $ax + by + c = 0$ , og punkterne har koordinaterne  $P(x_0, y_0)$  og  $Q(x_1, y_1)$ , har man

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Indsætter man det i ligningen (5.4), får man

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, l) &= \frac{\left| \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|} \\ &= \frac{|(x_0 - x_1)a + (y_0 - y_1)b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 - ax_1 - by_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Punktet  $Q(x_1, y_1)$  ligger på linjen, dvs. der gælder

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -ax_1 - by_1,$$

og derfor bliver afstanden

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \blacksquare$$

**Eksempel 5.14** Afstanden fra punktet  $P(3, 1)$  til linjen

$$l : 5x + 12y - 6 = 0$$

kan findes vha. sætning 5.13. Koordinaterne  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 1$  og konstanterne  $a = 5$ ,  $b = 12$  og  $c = -6$  sættes ind i formlen:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|5 \cdot 3 + 12 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|21|}{\sqrt{169}} = \frac{21}{13}.$$

**Eksempel 5.15** De to linjer

$$l : 4x - 3y + 2 = 0$$

$$m : 8x - 6y - 5 = 0$$

er parallelle. Det kan man se fordi de to normalvektorer

$$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{n}_m = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

er parallelle ( $\vec{n}_m = 2\vec{n}_l$ ). De to linjer ligger altså med en fast afstand fra hinanden.

Denne afstand kan også bestemmes vha. sætning 5.13. Det kan gøres ved at finde et punkt på den ene linje og bestemme afstanden fra dette punkt til den anden linje (se figur 5.7).

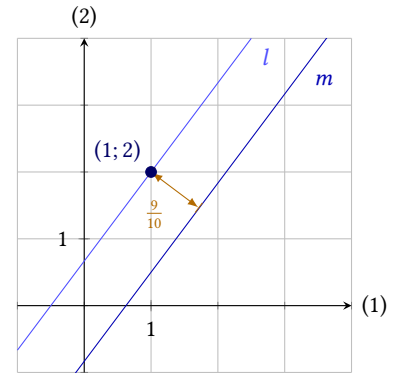
Hvis man sætter  $x = 1$ , får man for linjen  $l$  at

$$4 \cdot 1 - 3y + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2.$$

Linjen  $l$  går derfor gennem punktet  $(1, 2)$ . Dette punkt anvendes i formlen sammen med konstanterne fra ligningen  $m$ , og man får så

$$\text{dist}((1; 2), m) = \frac{|8 \cdot 1 - 6 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}.$$

Afstanden mellem de to linjer er altså  $\frac{9}{10}$ .



Figur 5.7: Afstanden fra  $l$  til  $m$  er lig afstanden fra et punkt på  $l$  til  $m$ .

## 5.4 Øvelser

### Øvelse 5.1

Bestem afstanden mellem

- $A(8, 3)$  og  $B(2, 9)$ ,
- $P(-4, 0)$  og  $Q(5, -7)$ .

### Øvelse 5.2

Opstil en parameterfremstilling for den linje der har retningsvektor  $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  og går gennem punktet  $P(9, 2)$ .

### Øvelse 5.3

Opstil en parameterfremstilling for den linje der går gennem punkterne

- $A(-5, 3)$  og  $B(1, 9)$ ,
- $P(4, 7)$  og  $Q(5, -3)$ .

### Øvelse 5.4

Opstil en parameterfremstilling for den linje der går gennem  $P(7, 2)$  og har  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  som normalvektor.

### Øvelse 5.5

To linjer  $l$  og  $m$  er givet ved parameterfremstillingerne

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

og

$$m : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

- Bestem skæringspunktet mellem de to linjer.

### Øvelse 5.6

Linjen  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Bestem en parameterfremstilling for linjen  $m$  der går gennem  $P(11, 5)$  og står vinkelret på  $l$ .
- Bestem skæringspunktet mellem  $l$  og  $m$ .

**Øvelse 5.7**

Bestem en ligning for linjen gennem  $P(8, 2)$  med normalvektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

**Øvelse 5.8**

Linjen  $l$  er givet ved parameterfremstillingen

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Bestem en ligning for linjen  $m$  der går gennem  $P(7, 0)$  og står vinkelret på  $l$ .
- Bestem skæringspunktet mellem  $l$  og  $m$ .

**Øvelse 5.9**

Omskriv følgende linjers ligninger til formen  $y = \alpha x + \beta$  hvis det er muligt.

- $3x - 6y + 12 = 0$
- $-2x + y - 3 = 0$
- $4x - 20 = 0$
- $5x - 3y + 9 = 0$ .

**Øvelse 5.10**

Linjen  $m$  står vinkelret på linjen  $l$  der er givet ved ligningen

$$l : y = 4x - 5.$$

- Bestem hældningskoefficienten for  $m$ .

Linjen  $m$  går gennem punktet  $(0, 15)$ .

- Bestem en ligning for  $m$ .
- Bestem skæringspunktet mellem  $m$  og  $l$ .

**Øvelse 5.11**

Bestem afstanden fra punktet  $P$  til linjen  $l$  når

- $P(4, 5)$  og  $l : 3x - 4y + 2 = 0$
- $P(-1, 0)$  og  $l : 13x + 5y - 24 = 0$
- $P(9, 2)$  og  $l : 5x - 2y = 6$

# Cirkler

# 6

En cirkel beskrives nedenfor som alle de punkter der ligger på cirkelperiferien. Fælles for alle disse punkter er at de har samme afstand (radius) til ét bestemt punkt (centrum). Dette kan man bruge til at opstille en ligning for cirklen:

## Sætning 6.1

Cirklen med centrum i  $C(x_0, y_0)$  og radius  $r$  har ligningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 .$$

## Bevis

Cirklen består af alle de punkter  $P(x, y)$ , som har afstanden  $r$  til centrum, dvs.  $|CP| = r$ . Men ifølge sætning 5.1 er

$$|CP| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} ,$$

dvs.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= r && \Leftrightarrow \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2 . && \blacksquare \end{aligned}$$

**Eksempel 6.2** Cirklen med radius  $r = 5$  og centrum i  $C(4, -1)$  har ligningen

$$\begin{aligned} (x - 4)^2 + (y - (-1))^2 &= 5^2 && \Leftrightarrow \\ (x - 4)^2 + (y + 1)^2 &= 25 . \end{aligned}$$

Ligningen kan reduceres yderligere ved at gange parenteserne ud. Man får så

$$\begin{aligned} x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + y^2 + 1^2 + 2 \cdot y \cdot 1 &= 25 && \Leftrightarrow \\ x^2 + 16 - 8x + y^2 + 1 + 2y &= 25 && \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 &= 0 . \end{aligned}$$

**Eksempel 6.3** Ligningen

$$x^2 + y^2 - 6x + 14y + 42 = 0$$

er ligningen for en cirkel. Hvis man vil finde centrum og radius for cirklen, bliver man nødt til at skrive ligningen om så den får samme form som ligningen i sætning 6.1.

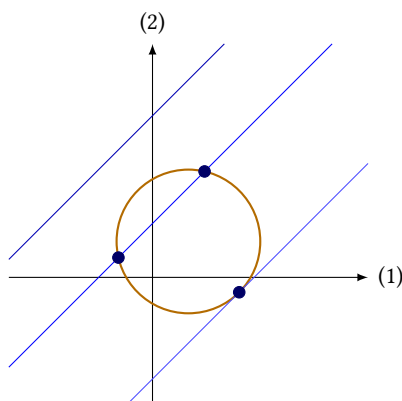
For at gøre det skal leddene  $x^2$  og  $-6x$  skrives om til kvadratet på en toleddet størrelse. Det samme gælder for  $y^2$  og  $14y$ . Hvis  $x^2$  og  $-6x$  kommer af kvadratet på en toleddet størrelse, så er  $-6x$  det dobbelte produkt. Det giver derfor mening at beregne

$$(x - 3)^2 = x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3 = x^2 + 9 - 6x ,$$

Her kan man se at  $x^2 - 6x$  kan omskrives til  $(x - 3)^2 - 9$ . På samme måde kan man vise at  $y^2 + 14y = (y + 7)^2 - 49$ . Derfor kan cirkelns ligning omskrives på følgende måde

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 14y + 42 &= 0 && \Leftrightarrow \\ x^2 - 6x + y^2 + 14y + 42 &= 0 && \Leftrightarrow \\ (x - 3)^2 - 9 + (y + 7)^2 - 49 + 42 &= 0 && \Leftrightarrow \\ (x - 3)^2 + (y + 7)^2 &= 16 && \Leftrightarrow \\ (x - 3)^2 + (y - (-7))^2 &= 4^2 . \end{aligned}$$

Når ligningen nu står på denne form, kan man direkte aflæse at radius er  $r = 4$ , og centrum er  $C(3, -7)$ .



Figur 6.1: En linje kan skære en cirkel 0, 1 eller 2 steder.

## 6.1 Skæringspunkter mellem cirkler og linjer

En cirkel og en linje kan have 0, 1 eller 2 skæringspunkter, se figur 6.1. Hvis cirklen og linjen har præcis ét punkt fælles, er linjen en tangent til cirklen. Hvor mange skæringspunkter der er mellem cirklen og linjen, kan man finde ud af ved at bestemme afstanden mellem cirkelns centrum og linjen. Hvis afstanden fra centrum til linjen er præcis lig med radius, så er linjen en tangent. Hvis afstanden er mindre end radius, er der to skæringspunkter, og hvis afstanden er større end radius, er der ingen skæringspunkter mellem cirklen og linjen.

**Eksempel 6.4** Her bestemmes det om der er skæringspunkter mellem linjen med ligningen

$$3x - 2y - 7 = 0$$

og cirklen med ligningen

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9 .$$

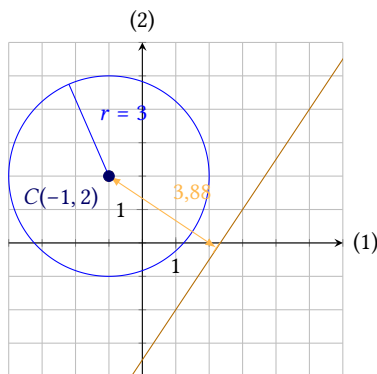
Cirkelns centrum er  $C(-1, 2)$  og dens radius er  $r = \sqrt{9} = 3$ . Afstanden fra centrum til  $l$  er

$$\text{dist}(C, l) = \frac{|3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 - 7|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{13}} = \frac{14}{\sqrt{13}} \approx 3,88 .$$

Da afstanden fra centrum til linjen er større end radius, har linjen og cirklen ingen skæringspunkter (se figur 6.2).

**Eksempel 6.5** Linjen med ligningen

$$x - 3y + 2 = 0$$



Figur 6.2: Afstanden fra centrum til linjen er større end radius.

og cirklen med ligningen

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

har to skæringspunkter. Det ses af at afstanden fra cirkelns centrum  $C(1, 4)$  til linjen er

$$\text{dist}(C, l) = \frac{|1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{1+9}} = \frac{9}{\sqrt{10}} \approx 2,85$$

som er mindre end cirkelns radius  $r = \sqrt{25} = 5$  (se figur 6.3).

**Eksempel 6.6** Linjen og cirklen i eksempel 6.5 skærer hinanden to steder. Her bestemmes de to skæringspunkter (se figur 6.3).

Først omskrives linjens ligning

$$x - 3y + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3y - 2.$$

Denne værdi for  $x$  sættes ind i cirkelns ligning som bliver til

$$(3y - 2 - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

Dette er en andengradsligning. Man kan løse den vha. et CAS-værktøj hvorved man får

$$y = 0 \quad \vee \quad y = \frac{13}{5}.$$

De to skæringspunkter har disse værdier af  $y$ . Værdien af  $x$  kan beregnes ud fra linjens ligning:

$$\begin{aligned} y = 0 : \quad x &= 3 \cdot 0 - 2 = -2 \\ y = \frac{13}{5} : \quad x &= 3 \cdot \frac{13}{5} - 2 = \frac{39}{5} - \frac{10}{5} = \frac{29}{5}. \end{aligned}$$

Linjen skærer altså cirklen i de to punkter  $(-2, 0)$  og  $(\frac{29}{5}; \frac{13}{5})$ .

Hvis en linje er givet ved en parameterfremstilling, kan man ikke uden videre beregne afstanden fra linjen til en cirkels centrum. Er man interesseret i dette, skal man altså først skrive parameterfremstillingen om til en ligning (se eksempel 5.9).

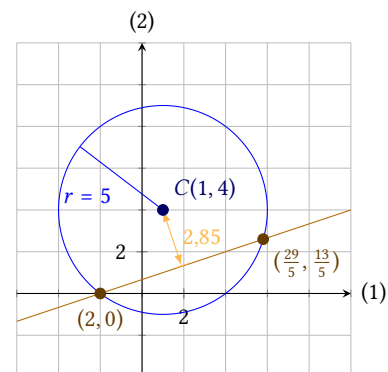
Men er man blot interesseret i skæringspunkterne mellem linjen og cirklen er dette ikke nødvendigt. Her kan man i stedet udnytte parameterfremstillingens koordinatfunktioner.

**Eksempel 6.7** Hvis en linje er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

og en cirkel er givet ved ligningen

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 18,$$



**Figur 6.3:** Afstanden fra centrum til linjen er mindre end radius.

kan man finde skæringspunkterne ved at sætte linjens koordinatfunktioner

$$x = 3 + 2t \quad \text{og} \quad y = 5 - t$$

ind i cirkelns ligning. De to udtryk for  $x$  og  $y$  sættes ind i ligningen:

$$\begin{aligned} \overbrace{(3 + 2t - 2)}^x + \overbrace{(5 - t - 1)}^y &= 18 \iff \\ (1 + 2t)^2 + (4 - t)^2 &= 18 \iff \\ 1 + 4t^2 + 4t + 16 + t^2 - 8t &= 18 \iff \\ 5t^2 - 4t + 17 &= 18 \iff \\ 5t^2 - 4t - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Løser man ligningen vha. et CAS-værktøj, finder man løsningerne

$$t = -\frac{1}{5} \quad \vee \quad t = 1.$$

Man ved altså nu at der er to skæringspunkter idet de to løsninger er de værdier af parameteren  $t$  der svarer til skæringspunkterne. For at finde punkterne skal man sætte disse værdier af  $t$  ind i linjens parameterfremstilling:

$$\begin{aligned} t = -\frac{1}{5} : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{26}{5} \end{pmatrix} \\ t = 1 : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Linjen skærer altså cirklen i punkterne  $\left(\frac{13}{5}, \frac{26}{5}\right)$  og  $(5, 4)$ .

## 6.2 Cirkeltangenter

En tangent til en cirkel er en linje der kun har ét punkt fælles med cirklen. Dette punkt kaldes *røringspunktet*. Derudover vil en tangent til en cirkel altid stå vinkelret på linjen gennem centrum og røringspunktet.

Som omtalt ovenfor kan man bestemme om en given linje er en tangent ved at beregne afstanden fra linjen til cirkelns centrum. Afstanden fra centrum til en tangent er nemlig lig med radius. Alternativt kan man bestemme om en linje givet ved en parameterfremstilling er en tangent ved at bestemme antallet af skæringspunkter (se eksempel 6.7).

I de følgende eksempler vises hvordan man kan *konstruere* bestemte tangenter hvis man kender enten et punkt eller en hældning.

**Eksempel 6.8** Punktet  $P(5, -7)$  ligger på cirklen givet ved ligningen

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

Her bestemmes en ligning til den tangent til cirklen der har dette punkt som røringspunkt.

Cirkelns centrum er  $C(2, -3)$ . Den søgte tangent står vinkelret på linjestykket  $CP$ , dvs. vektoren  $\overrightarrow{CP}$  kan bruges som normalvektor for linjen:

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ -7 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



Da man nu kender et punkt,  $P(5, -7)$ , som linjen går igennem, og en normalvektor,  $\overline{CP}$ , kan linjens ligning skrives op vha. sætning 5.7:

$$\begin{aligned} 3(x - 5) + (-4) \cdot (y - (-7)) &= 0 && \Leftrightarrow \\ 3x - 4y - 43 &= 0. \end{aligned}$$

Cirklen og tangenten kan ses på figur 6.4.

**Eksempel 6.9** Her bestemmes røringpunkterne for de tangenter til cirklen

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

der er parallelle med linjen  $l$  med ligningen

$$l : 4x - 3y + 30 = 0.$$

Cirklen må have to tangenter der er parallelle med den givne linje. En linje gennem de to røringpunkter må gå gennem centrum og stå vinkelret på linjen  $l$ . Idet den står vinkelret på  $l$ , kan man finde en parameterfremstilling for linjen ved at bruge en normalvektor for  $l$  som retningsvektor. Dvs.

$$\vec{r} = \vec{n}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Man ved at linjen gennem røringpunkterne går gennem centrum  $C(2, 1)$ . Dette punkt giver sammen med retningsvektoren parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Skæringspunkterne mellem denne linje og cirklen vil være de søgte røringpunkter (se figur 6.5). Disse skæringspunkter kan bestemmes på samme måde som i eksempel 6.7 vha. linjens koordinatfunktioner

$$x = 2 + 4t \quad \text{og} \quad y = 1 - 3t$$

som sættes ind i cirkelns ligning:

$$(2 + 4t - 2)^2 + (1 - 3t - 1)^2 = 25 \quad \Leftrightarrow$$

$$(4t)^2 + (-3t)^2 = 25 \quad \Leftrightarrow$$

$$16t^2 + 9t^2 = 25 \quad \Leftrightarrow$$

$$25t^2 = 25 \quad \Leftrightarrow$$

$$t^2 = 1 \quad \Leftrightarrow$$

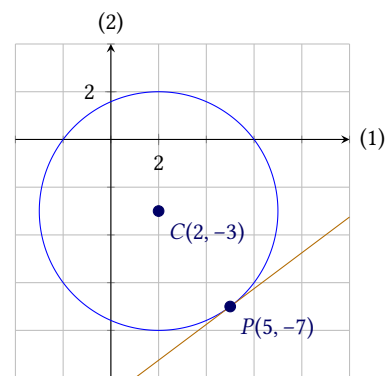
$$t = -1 \quad \vee \quad t = 1.$$

De to værdier af parameteren  $t$  kan nu sættes ind i parameterfremstillingen, og man får

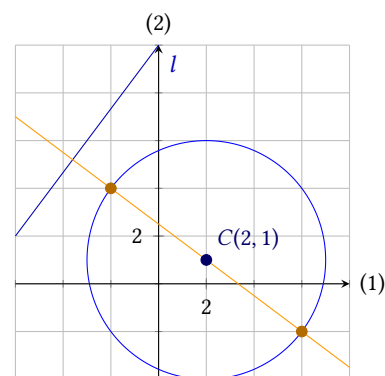
$$t = -1 : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$t = 1 : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

De to tangenter der er parallelle med  $l$ , rører altså cirklen i punkterne  $(-2, 4)$  og  $(6, -2)$ . Hvis man vil finde ligningerne for tangenterne, kan dette gøres på samme måde som i eksempel 6.8.



Figur 6.4: Cirkelns tangent gennem det givne punkt  $P(5, -7)$ .



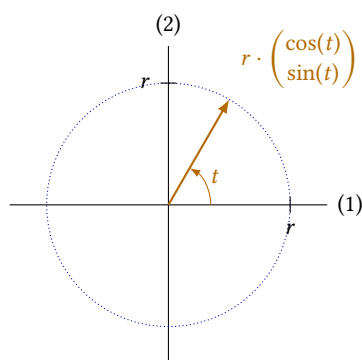
Figur 6.5: Røringpunkterne for de cirkeltangenter der er parallelle med linjen  $l$ .

### 6.3 Cirkelns parameterfremstilling

Som afslutning på dette kapitel vises hvordan cirkler også kan beskrives ved parameterfremstillinger.

Vektoren med længde  $r$  og retningsvinkel  $t$  har koordinaterne  $r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ . Denne vektor er stedvektor for et punkt på cirklen med radius  $r$  og centrum i  $(0, 0)$ . Hvis vinklen  $t$  løber fra  $-180^\circ$  til  $180^\circ$ , får man beskrevet alle punkterne på cirkelperiferien. Dvs. denne cirklen kan beskrives ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad -180^\circ < t \leq 180^\circ.$$



**Figur 6.6:** Parametrisering af cirklen med radius  $r$  og centrum  $(0; 0)$ .

Skal man udlede en parameterfremstilling for en cirkel med centrum i  $(x_0, y_0)$  i stedet for  $(0, 0)$ , skal man blot lægge retningsvektoren for dette punkt til parameterfremstillingen, og man får derved den følgende sætning.

#### Sætning 6.10

Cirklen med centrum i  $C(x_0, y_0)$  og radius  $r$  kan beskrives ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}, \quad -180^\circ < t \leq 180^\circ.$$

Dette er ikke den eneste mulighed for en parameterfremstilling for cirklen. I virkeligheden vil enhver parameterfremstilling af typen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

kunne bruges. En parameterfremstilling som denne bruges til at beskrive et punkt der bevæger sig rundt i en jævn cirkelbevægelse. Størrelsen af konstanten  $\omega$  hænger sammen med hvor hurtigt punktet bevæger sig rundt på cirklen.

### 6.4 Øvelser

#### Øvelse 6.1

Opstil en ligning for cirklen med centrum i  $C$  og radius  $r$ , når

- $C(1, 4)$  og  $r = 2$
- $C(0, 6)$  og  $r = 7$
- $C(-3, 7)$  og  $r = 1$

#### Øvelse 6.2

Bestem centrum og radius for cirklerne givet ved følgende ligninger:

- $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 23$
- $x^2 + y^2 + 2x = 24$
- $x^2 + y^2 + 8x + 4y = 61$

**Øvelse 6.3**

Bestem antallet af skæringspunkter mellem linjen  $l$  givet ved ligningen

$$l : 4x - 7y + 8 = 0$$

og cirklen givet ved ligningen

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 16 .$$

**Øvelse 6.4**

Bestem skæringspunkterne mellem linjen  $l$  givet ved ligningen

$$l : x + y = 6$$

og cirklen givet ved ligningen

$$(x - 3)^2 + (x - 2)^2 = 13 .$$

**Øvelse 6.5**

Bestem skæringspunkterne mellem linjen  $l$  givet ved parameterfremstillingen

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

og cirklen givet ved ligningen

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25 .$$

**Øvelse 6.6**

Cirklen med ligningen

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

går gennem de tre punkter  $A(-2, 6)$ ,  $B(2, 8)$  og  $C(7, 3)$ .

- a) Bestem en ligning for tangenten til cirklen i hver af disse punkter.

**Øvelse 6.7**

Cirklen med ligningen

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 169 ,$$

har to tangenter der er parallelle med linjen med ligningen

$$-12x + 5y + 10 = 0 .$$

- a) Bestem røringpunkterne for disse tangenter.  
b) Bestem en ligning for hver af tangenterne.