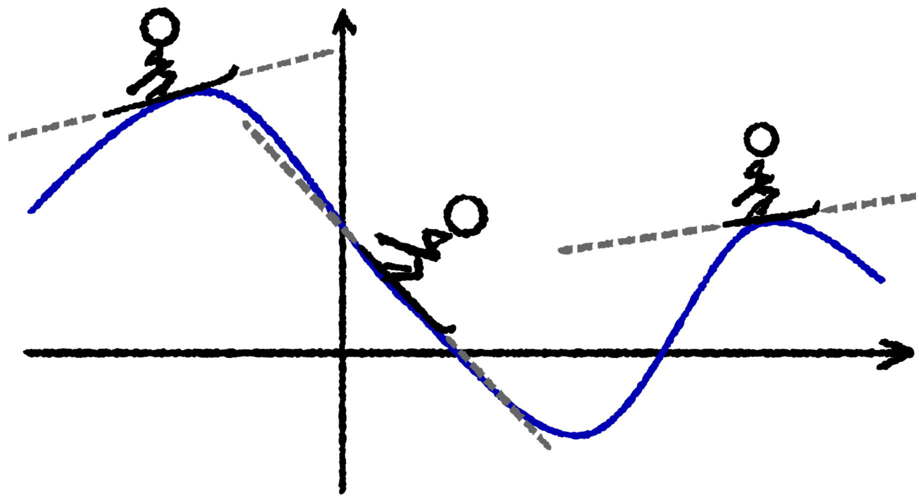
Differentialregning

Version 3.0
7. august 2024



Mike Vandal Auerbach
www.mathematicus.dk

Differentialregning
Version 3.0, 2024

Disse noter er skrevet til matematikundervisningen på stx A- og B-niveau efter læreplanen 2024. Noterne indeholder kernestoffet og lidt til.

Læreplanen lægger ikke op til at grænseværdier og kontinuitet gives en selvstændig behandling på B-niveau, og det er muligt at læse noterne uden at læse kapitel 1.

Enkelte grafer/figurer er markeret med symbolet der fungerer som link til et interaktivt GeoGebra-arbejdsark. Se også www.geogebra.org.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

Indhold

Grænseværdier 1

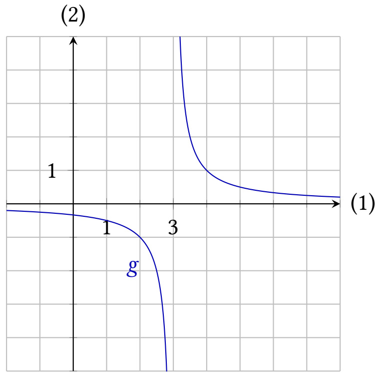
Når man undersøger funktioner, kan man komme ud for at der findes værdier af den uafhængige variabel hvor funktionen ikke er defineret.

Eksempel 1.1 Funktionen $g(x) = \frac{1}{x-3}$ er ikke defineret for $x = 3$. Grunden til at funktionen ikke er defineret for $x = 3$, er at prøver man at beregne $g(3)$, får man

$$g(3) = \frac{1}{3-3} = \frac{1}{0}$$

som ikke giver nogen mening.

Tegner man grafen for funktionen, får man billedet på figur 1.1. Her er det tydeligt at der sker noget specielt omkring $x = 3$, og at det ikke giver nogen mening at tale om funktionsværdien $g(3)$.



Figur 1.1: Grafen for $g(x) = \frac{1}{x-3}$.

Men der findes funktioner som opfører sig anderledes, selv om de evt. skulle være udefinerede et enkelt sted.

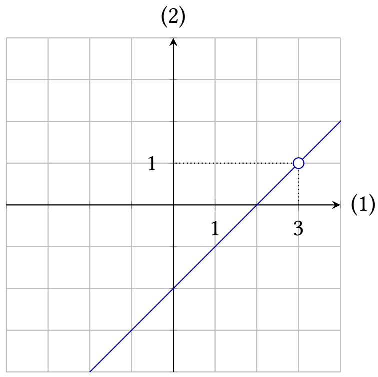
Eksempel 1.2 Her ses på funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \ .$$

Denne funktion er ikke defineret for $x = 3$ idet

$$f(3) = \frac{3^2 - 5 \cdot 3 + 6}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

som ikke giver nogen mening.



Figur 1.2: Grafen for $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

Hvis man tegner grafen for f, får man billedet på figur 1.2. Her kan man se at selv om funktionen ikke er defineret for $x = 3$, så er grafen dog så pæn at man faktisk kan sige noget om hvad $f(3)$ burde give hvis denne værdi var defineret.

Tabel 1.3: Funktionsværdier for funktionen $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

x	$f(x)$
2,9	0,9
2,99	0,99
3	udefineret
3,01	1,01
3,1	1,1

Hvis man indsætter værdier af x som er »tæt på« 3, får man tabel 1.3. Ud fra figur 1.2 og tabel 1.3 virker det rimeligt at påstå at jo tættere x kommer på 3, jo tættere kommer $f(x)$ på 1.

Skulle man give $f(3)$ en værdi, ville det derfor være nærliggende at vælge 1 – også selv om $f(3)$ ikke er defineret.

Selv om $f(3)$ ikke er defineret for funktionen i eksempel 1.2, så vil $f(x)$ nærme sig et bestemt tal når x nærmer sig 3. Man taler derfor om at $f(x)$

har en *grænseværdi for x gående mod* 3. Denne grænseværdi har værdien 1. Dette skrives også[1]

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 1 \ .$$

[1]Betegnelsen »lim« kommer af latin *limes* der betyder »grænse« (jf. engelsk *limit*).

Grænseværdien for funktionen $f(x)$ når x går mod 3, er altså 1 fordi $f(x)$ kommer tættere og tættere på 1 når x kommer tættere og tættere på 3. Hvis man skal give en præcis matematisk definition på dette, bliver man nødt til først at beskrive hvad man mener med »tættere på«. Man definerer derfor først begrebet *omegn*:

Definition 1.3

Givet et tal a og en afstand ε, defineres den *åbne omegn* $\Omega_\varepsilon(a)$ til at være det åbne interval $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$.

Den *udprikkede omegn* $\Omega^\circ_\varepsilon(a)$ omkring a er den åbne omegn $\Omega_\varepsilon(a)$ fraregnet tallet a: $\Omega^\circ_\varepsilon(a) = \Omega_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

Pointen her er at omegnen $\Omega_\varepsilon(a)$ indeholder alle de tal der ligger tættere på a end ε. Hvis ε er et lille tal, beskriver omegnen derfor tal der er »tæt på« a – og hvis man gør ε mindre og mindre, så kigger man på tal der ligger tættere og tættere på a.

Man har brug for en *udprikket* omegn, for når man ser på omegne omkring x_0, er den funktion man kigger på, ikke nødvendigvis defineret for denne x-værdi, og derfor har man brug for en omegn hvor dette tal ekskluderes.

Grænseværdien for en funktion i et punkt kan nu defineres på følgende måde:

Definition 1.4

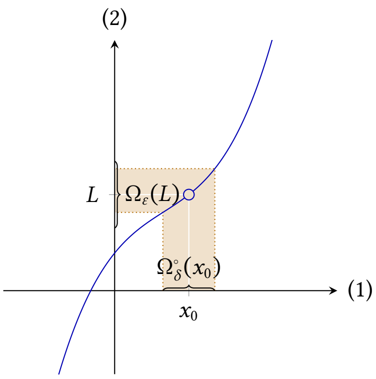
Lad der være givet en funktion f og et tal L, og lad $f(x)$ være defineret for alle x i en udprikket omegn af x_0.

Hvis man til enhver vilkårligt lille åben omegn $\Omega_\varepsilon(L)$ af L kan finde en udprikket omegn $\Omega^\circ_\delta(x_0)$ af x_0 sådan at

$$x \in \Omega^\circ_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in \Omega_\varepsilon(L) \ ,$$

så kaldes L *grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod x_0*, og man skriver

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \ .$$



Figur 1.4: Hvis funktionsværdien skal ligge i omegnen $\Omega_\varepsilon(L)$ af L, kan dette gøres ved at lade x ligge i den lille udprikkede omegn $\Omega^\circ_\delta(x_0)$ af x_0.

På figur 1.4 er det vist hvordan dette kan beskrives: Funktionsværdien $f(x)$ kan komme til at ligge i den lille omegn $\Omega_\varepsilon(L)$ af L når blot x ligger i den lille udprikkede omegn Ω°_δ af x_0. Dvs. uanset hvor lille en omegn man vælger omkring L, kan man finde en lille udprikket omegn om x_0, sådan at blot x ligger i denne udprikkede omegn, ligger $f(x)$ i omegnen omkring L.

Idet man kan gøre omegnen $\Omega_\varepsilon(L)$ vilkårligt lille, er det det samme som at sige at hvis x bevæger sig tættere og tættere på x_0, vil $f(x)$ komme tættere og tættere på L.

Bemærk i øvrigt at man i definition 1.4 slet ikke tager stilling til en evt. funktionsværdi for $x = x_0$. Dvs. funktionen kan være defineret for denne værdi af x, eller den kan være udefineret. Hvis funktionen f er defineret i x_0, så findes der en funktionsværdi $f(x_0)$, men grænseværdien er defineret fuldstændigt uafhængigt af denne – og en evt. funktionsværdi er derfor heller ikke nødvendigvis lig med grænseværdien.

Hvis man vil undersøge hvordan funktioner opfører sig i nærheden af variabelværdier hvor de *er* defineret, hvad finder man så?

Eksempel 1.5 Hvad er $\lim\limits_{x\to 5} x^2 + 3$?

Udtrykket $x^2 + 3$ er defineret for $x = 5$ hvor det giver

$$5^2 + 3 = 28\ .$$

Hvis man lader x nærme sig 5, så vil værdien af $x^2 + 3$ nærme sig 28, og man finder derfor at

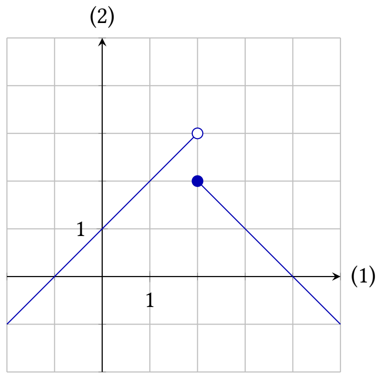
$$\lim_{x\to 5} x^2 + 3 = 28\ .$$

Nogle gange kan man altså blot sætte det x man vil undersøge, ind i udtrykket.

Hvis man vil finde grænseværdien af en funktion $f(x)$ for $x = x_0$, kan man altså i nogle tilfælde blot udregne $f(x_0)$. Det er dog ikke altid tilfældet, selv om funktionen er defineret for $x = x_0$.

Eksempel 1.6 Her ses på funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{for } x < 2 \\ 4-x & \text{for } x \geq 2 \end{cases}\ .$$



Figur 1.5: Grafen for den stykkevist lineære funktion i eksempel 1.6.

Funktionen f opfører sig altså således at den er lig $x + 1$ så længe $x < 2$, derefter er den lig $4 - x$. Der er altså tale om en stykkevist lineær funktion. Grafen for f kan ses på figur 1.5.

Funktionsværdien i $x = 2$ er

$$f(2) = 4 - 2 = 2\ ,$$

men hvad er mon funktionens grænseværdi i $x = 2$?

Når $x < 2$, så er $f(x) = x + 1$, dvs. $f(x)$ vil komme tættere og tættere på $2 + 1$, jo tættere x kommer på 2. Hvis man undersøger grænseværdien ved at nærme sig $x = 2$ nedefra, vil man derfor finde værdien 3.

Undersøger man grænseværdien af $f(x)$ ved at nærme sig $x = 2$ ovenfra, vil man følge grafen for $4 - x$, hvorved funktionsværdien vil nærme sig 2 når x nærmer sig 2.

Da man får to forskellige svar, alt efter hvilken vej man nærmer sig $x = 2$, må man konkludere at grænseværdien $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ *ikke eksisterer* – selv om funktionen er defineret for $x = 2$.

Eksempel 1.7 I eksempel 1.2 blev der set på funktionen $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$, og det blev konkluderet at

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 1 \ .$$

I princippet kan man argumentere for at dette ikke kan være givet ud fra figur 1.2 og tabel 1.3, idet det er umuligt kun ud fra figuren og tabellen at se om den rigtige grænseværdi f.eks. er 1,00000326 og ikke præcis 1.

Det viser sig dog at $x^2 - 5x + 6$ kan omskrives til $(x-2)(x-3)$, og derfor er

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = x - 2 \ ,$$

så længe $x \neq 3$.

Men da definitionen på grænseværdien ikke afhænger af hvordan funktionen rent faktisk opfører sig når $x = 3$, men kun når x er tæt på 3, så er

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3} = \lim_{x\to 3} x - 2 \ .$$

Her skal man altså blot finde ud af hvilket tal $x - 2$ nærmer sig når x nærmer sig 3. Dette tal er præcis 1.

Altså er

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3} = 1 \ .$$

Som man kan se af eksemplet ovenover, kan der altså være en fordel i at undersøge om den funktion man skal finde en grænseværdi for, kan omskrives så man nemmere kan se hvad den søgte grænseværdi er.

Ud over at reducere udtrykket man beregner grænseværdien af, kan man også anvende følgende regneregler som ikke bevises her:

Sætning 1.8

Lad der være givet to funktioner f og g samt en konstant k. Hvis $\lim_{x\to x_0} f(x)$ og $\lim_{x\to x_0} g(x)$ eksisterer, er

1. $\lim_{x\to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Hvis der yderligere gælder at $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, så er

5. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$.

1.1 Kontinuitet

De fleste af de funktioner man ser på i gymnasiet, har grafer som er sammenhængende. Denne type funktioner kaldes *kontinuerte*. En funktion er altså kontinuert (evt. på et interval) hvis dens graf ingen »huller« har (i dette interval). Dette er en noget løs definition, men kontinuitet kan defineres helt præcis vha. grænseværdier.

I eksempel 1.6 blev der set på en funktion hvis graf *ikke* var sammenhængende (se figur 1.5). I eksemplet blev det vist at denne funktion ikke har nogen grænseværdi der hvor grafen »springer«.

Omvendt blev der i eksempel 1.5 vist en funktion hvor grænseværdien for et givet x netop var lig funktionsværdien. Denne funktions graf er sammenhængende, fordi man når man nærmer sig den valgte x-værdi, vil nærme sig den samme funktionsværdi både ovenfra og nedenfra – og denne funktionsværdi svarer til et punkt på grafen.

Man kan derfor definere kontinuerte funktioner på følgende måde.

Definition 1.9

En funktion f kaldes *kontinuert* på et interval $]a;b[$ hvis der for alle $x_0 \in \,]a;b[$ gælder at

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\ .$$

Eksempel 1.10 Funktionen

$$f(x) = x^2 + 4\ ,$$

er kontinuert for alle $x \in \mathbb{R}$.

Hvis man vælger f.eks. $x_0 = 3$, finder man

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} x^2 + 4 = 3^2 + 4 = f(3)\ ,$$

og dette kan gøres for enhver værdi af x_0 – ikke blot 3.

Altså er $f(x)$ kontinuert.

Eksempel 1.11 Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \neq 3 \\ 4 & \text{for } x = 3 \end{cases}$$

er ikke kontinuert for alle x.

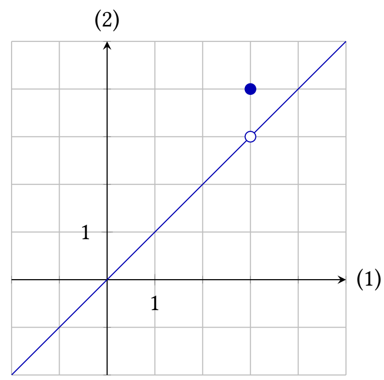
Man kan se på grafen (figur 1.6) at

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 3\ ,$$

men

$$f(3) = 4\ .$$

Altså er $\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$, og funktionen er derfor ikke kontinuert for alle x.



Figur 1.6: Denne funktion er ikke kontinuert.

1.2 Øvelser

Øvelse 1.1
Funktionen f har forskriften

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}\ .$$

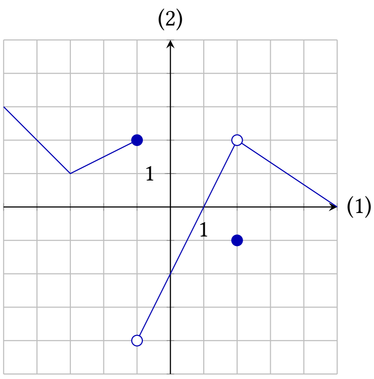
a) Forklar hvorfor $f(1)$ ikke er defineret.

b) Beregn $f(0{,}9)$, $f(0{,}99)$ og $f(0{,}999)$.

c) Beregn $f(1{,}1)$, $f(1{,}01)$ og $f(1{,}001)$.

d) Giv et bud på værdien af $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Øvelse 1.2
Billedet herunder viser grafen for funktionen f:



Afgør om følgende grænseværdier eksisterer, og bestem dem i givet fald:

a) $\lim_{x\to -3} f(x)$ b) $\lim_{x\to -1} f(x)$

c) $\lim_{x\to 1} f(x)$ d) $\lim_{x\to 2} f(x)$

Øvelse 1.3
Tegn graferne for de følgende funktioner, og afgør vha. grafen om funktionerne har en grænseværdi for $x \to 1$:

a) $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{for } x < 1 \\ 2x & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{for } x < 1 \\ 3x + 1 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{for } x < 1 \\ 5 & \text{for } x = 1 \\ 2x + 2 & \text{for } x > 1 \end{cases}$

Øvelse 1.4
Bestem de følgende grænseværdier ved beregning:

a) $\lim_{x\to 2} x^2 - 4$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{6x}$

c) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{x - 5}$ d) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$

e) $\lim_{x\to -10} 8$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

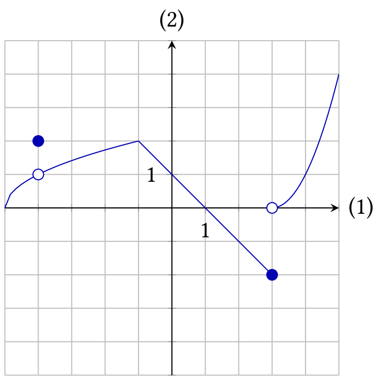
g) $\lim_{x\to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}$

Øvelse 1.5
Har funktionen

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

en grænseværdi for $x \to 0$?

Øvelse 1.6
Billedet herunder viser grafen for funktionen f:



Er funktionen $f(x)$ kontinuert i

a) $x = -4$? b) $x = -2$?

c) $x = -1$? d) $x = 0$?

e) $x = 1$? f) $x = 2$?

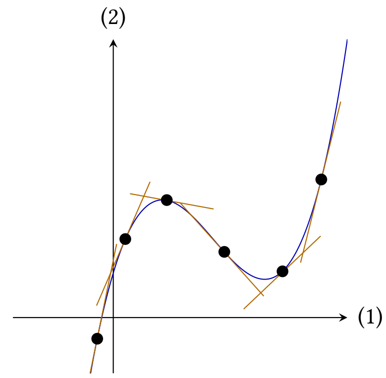
Har funktionen en grænseværdi disse steder?

2 Afledte funktioner

Differentialregning er en gren af matematikken der beskæftiger sig med at finde ud af hvor hurtigt en funktion $f(x)$ vokser for en bestemt værdi af x. Én måde at se på dette på er ved at undersøge hvor stejl grafen er i punktet $(x_0, f(x_0))$.

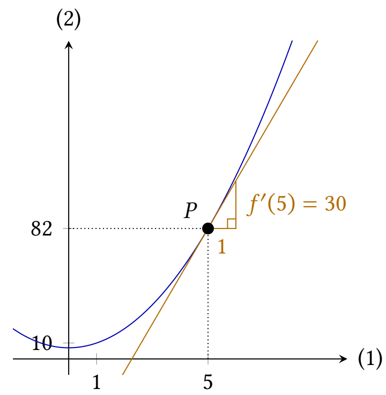
Det typiske mål for »stejlhed« er *hældningskoefficienten*, men da det kun er rette linjer der har hældningskoefficienter, skal man altså på en eller anden måde have omsat grafens forløb i punktet $(x_0, f(x_0))$ til en ret linje man kan finde hældningen af.

Hvis funktionens graf er pæn og glat, kan man i hvert punkt tegne en ret linje der flugter med grafen i dette punkt. En sådan linje kaldes en *tangent*. En illustration af dette kan ses på figur 2.1.



Figur 2.1: I hvert punkt på grafen kan der tegnes en tangent. Her er nogle af tangenterne illustreret med linjestykker.

Eksempel 2.1 Her ses på funktionen $f(x) = 3x^2 + 7$. Grafen for denne funktion går gennem punktet $P(5, 82)$. I dette punkt har grafen en tangent, se figur 2.2.



Figur 2.2: Grafen for f har en tangent i punktet $(5, 82)$.

Tangentens hældning i dette punkt kaldes $f'(5)$. Hvis man på forhånd ved at $f'(5) = 30$, kan man finde frem til en ligning for tangenten.

Tangenten er en ret linje, så den har ligningen $y = ax + b$. Når man ved at $f'(5) = 30$, ved man også at ligningen er $y = 30x + b$. Tangentens røringspunkt er punktet $P(5, 82)$, derfor er

$$82 = 30 \cdot 5 + b \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 82 - 30 \cdot 5 = -68 \; .$$

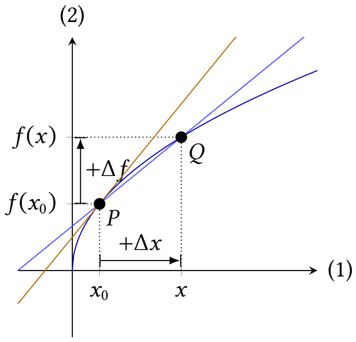
Tangenten til grafen i punktet $P(5, 82)$ har altså ligningen

$$y = 30x - 68 \; .$$

I eksemplet ovenfor ser man at man kan finde en ligning for en given tangent hvis man i forvejen kender tangentens hældning. Det store spørgsmål er nu hvordan man finder frem til denne hældning.

Man kan selvfølgelig forestille sig at man efter bedste evne tegner tangenten og derefter aflæser hældningen, men det kan næppe kaldes en præcis metode.

Tangenterne til grafen for en funktion er rette linjer. For at bestemme hældningskoefficienten til en ret linje skal man bruge to punkter på linjen. Her løber man ind i det problem at man kun kender ét punkt, nemlig det punkt $P(x_0, f(x_0))$ hvor tangenten rører grafen.



Figur 2.3: Grafen for f går gennem de to punkter P og Q. Q ligger ikke på tangenten, men på sekanten.

Da man ikke kender tangentens ligning, kan man ikke regne sig frem til et andet punkt. Det bedste man kan gøre, er derfor at finde et andet punkt $Q(x, f(x))$ på grafen som ligger tæt på tangentens røringspunkt P, se figur 2.3.

Hvis man beregner en hældning vha. punkterne $P(x_0, f(x_0))$ og $Q(x, f(x))$, får man ikke tangentens hældning, men en *sekant*hældning[1] der kun er en tilnærmelse. Jo tættere x ligger på x_0, dvs. jo tættere Q ligger på P, des bedre bliver tilnærmelsen idet sekanten på figur 2.3 kommer tættere og tættere på tangenten jo tættere x er på x_0.

Man kan altså finde en tilnærmelse til tangentens hældning $f'(x_0)$ ved at beregne hældningskoefficienten a_{PQ} af linjen gennem de to punkter P og Q, dvs.

$$a_{PQ} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

hvor x er tæt på x_0.

I virkeligheden vil man gerne gerne have en præcis værdi for tangenthældningen og ikke blot en tilnærmelse. Dette kan man opnå ved at gøre lade x nærme sig x_0. Man kan dog ikke blot sætte $x = x_0$, for sætter man bare x_0 ind på x's plads får man

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{0}{0} \,,$$

og det giver ingen mening. Man prøver derfor at omskrive udtrykket sådan at man kan se om udtrykket nærmer sig en bestemt værdi når x nærmer sig x_0. Denne værdi kalder man *grænseværdien* for $x \to x_0$, og man skriver

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \,.$$

Dette tal kalder man *differentialkvotienten* i punktet $(x_0, f(x_0))$, og man sætter $f'(x_0)$ lig denne værdi hvis den findes.

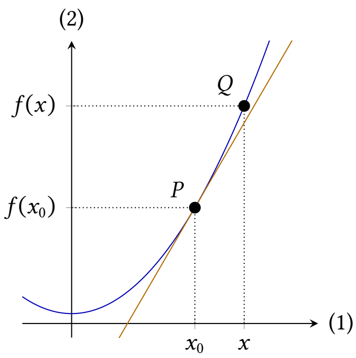
Eksempel 2.2 Grafen for $f(x) = 3x^2 + 7$ går gennem punktet $P(x_0, f(x_0))$. Tangenten til grafen for f i dette punkt har hældningen $f'(x_0)$. For at beregne denne værdi finder man først sekanthældningen ved hjælp af punkterne P og Q, se figur 2.4.

Punktet Q har koordinaterne $Q(x, f(x))$, så Δf bliver:[2]

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x) - f(x_0)\\ &= (3x^2 + 7) - (3x_0^2 + 7)\\ &= 3x^2 - 3x_0^2\\ &= 3(x + x_0)(x - x_0)\end{aligned}$$

Derefter beregner man $\frac{\Delta f}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{3(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 3(x + x_0) \,.$$



Figur 2.4: Punktet P er tangentens røringspunkt, så P ligger både på grafen og tangenten. Punktet Q ligger kun på grafen.

[1] En *sekant* er en ret linje der går gennem to punkter på grafen. Den *skærer* altså grafen i stedet for at tangere.

[2] I udregningen udnyttes at

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \,.$$

Tangenthældningen (eller *differentialkvotienten*) i punktet bliver så beregnet som grænseværdien for $x \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} 3(x + x_0) = 6x_0\ .$$

Man kan derfor konkludere at for funktionen $f(x) = 3x^2 + 7$ er

$$f'(x_0) = 6x_0\ .$$

Metoden kan sammenfattes i følgende definition:

Definition 2.3

For en funktion f defineres differentialkvotienten $f'(x_0)$ til at være

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\ .$$

Hvis denne grænseværdi eksisterer for alle x_0 i det åbne interval $]a; b[$, siges f at være *differentiabel* i $]a; b[$.

Ser man på definitionen af differentialkvotienten, kan man dele selve beregningen op i tre trin:

1. Beregn funktionstilvæksten Δf, og reducer så meget som muligt.
2. Beregn differenskvotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, og reducer så meget som muligt.
3. Bestem grænseværdien af $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ for $x \to x_0$. Dette tal er differentialkvotienten $f'(x_0)$.

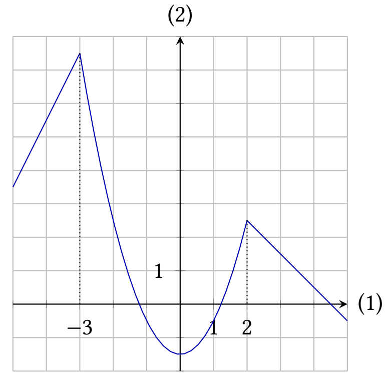
Denne beskrivelse kaldes ofte for *tre-trins-reglen*. Man skal dog være opmærksom på at fordi man skal beregne en grænseværdi, er beregningerne ikke altid simple, og nogle gange kan man endda komme ud for at det er nødvendigt at bytte lidt rundt på trinene.

2.1 Differentiabilitet

Det viser sig at hvis en funktion er differentiabel, er den også kontinuert, dvs. dens graf er sammenhængende. Det omvendte gælder ikke. Det viser sig at man godt kan finde funktioner hvis grafer er sammenhængende, men som ikke er differentiable.

Groft sagt svarer differentiabilitet til at grafen er en »glat« kurve. Der må altså ikke være »knæk« på grafen. På figur 2.5 ses et eksempel på grafen for en funktion der er kontinuert, men ikke differentiabel.

At grafen skal være glat de steder hvor funktionen er differentiabel, skyldes at hvis der er knæk så vil man få forskellige tangenthældninger alt efter om man nærmer sig punktet fra venstre eller højre. Der er derfor ikke nogen entydig tangenthældning.



Figur 2.5: Denne funktion er ikke differentiabel i $x = -3$ og $x = 2$; men den er kontinuert overalt.

2.2 Begreber og notation

Af definition 2.3 kan man læse hvordan man finder frem til differentialkvotienten $f'(x_0)$ af en funktion f i $x = x_0$. Dette tal beskriver tangenthældningen i det punkt hvor $x = x_0$. Differentialkvotienterne giver så en ny funktion $f'(x)$ som er den funktion der angiver tangenthældningen i ethvert punkt på grafen for $f(x)$; denne funktion kaldes den *afledte funktion* af f.

For at finde frem til differentialkvotienten ser man på *differenskvotienten*[3] $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Man undersøger hvad der sker med denne størrelse når x nærmer sig x_0.

[3] $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ kaldes »differenskvotienten« da Δf og Δx er differenser, og fordi resultatet af en division kaldes en kvotient.

Fordi man lader x nærme sig x_0 i differenskvotienten, kaldes resultatet for *differentialkvotienten*. Dette er ikke helt det samme som den afledte funktion. Den afledte funktion er rent faktisk en funktion, mens ordet differentialkvotient bruges om funktionsværdien af $f'(x)$ i et bestemt punkt. Man vil dog nogle steder kunne se de to ord *afledt funktion* og *differentialkvotient* brugt som synonymer.

Idet differentialkvotienten bestemmes ud fra differenskvotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, bruger man også somme tider notationen $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ for den afledte funktion.[4]

[4] Bemærk, at $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ er fuldstændigt det samme som $f'(x)$. Det betyder at symbolet $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ *ikke* skal forstås som en brøk; man kan altså ikke skille $\mathrm{d}f$ og $\mathrm{d}x$ ad.

Følgende udsagn er altså fuldstændigt ækvivalente:

1. Den afledte funktion af $f(x) = 3x^2 + 7$ er $f'(x) = 6x$.
2. Den afledte funktion af $f(x) = 3x^2 + 7$ er $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 6x$.

Det samme gælder følgende udsagn:

1. Differentialkvotienten af $f(x) = 3x^2 + 7$ for $x = 2$ er $f'(2) = 12$.
2. Differentialkvotienten af $f(x) = 3x^2 + 7$ for $x = 2$ er $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2} = 12$.

2.3 Diverse differentialkvotienter

Nedenfor følger en udledning af hvordan differentialkvotienterne ser ud for en række simple funktioner.

Sætning 2.4

Differentialkvotienten af $f(x) = k$ hvor k er en konstant, er $f'(x_0) = 0$.

Dette resultat følger af, at grafen for $f(x) = k$ er en linje parallel med førsteaksen, dvs. en linje med hældning 0. Idet $f'(x_0)$ angiver tangenthældningen i punktet $(x_0, f(x_0))$, og grafen for f har hældning 0 overalt, bliver $f'(x_0) = 0$. Her følger dog alligevel et formelt bevis hvor definition 2.3 anvendes:

Bevis
Hvis $f(x) = k$, bliver

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = k - k = 0\,.$$

Derfor er

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0}{x - x_0} = 0 \ .$$

Idet $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$ uanset hvilken værdi Δx har, vil der også gælde at

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 0 \ , \qquad \text{når } x \to x_0 \ .$$

dvs.

$$f'(x_0) = 0 \ .$$

■

Sætning 2.5

Hvis $f(x) = x$, så er $f'(x_0) = 1$.

Grafen for $f(x) = x$ er en ret linje med hældning 1. Heraf følger sætningen. Et formelt bevis med anvendelse af definition 2.3 overlades som en øvelse til læseren.

Sætning 2.6

Når $f(x) = x^2$, er differentialkvotienten $f'(x_0) = 2x_0$.

Bevis
Først beregnes

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0) \ .$$

Dernæst beregnes brøken $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \ .$$

Hvis $x \to x_0$ vil dette udtryk gå mod $2x_0$.

Derfor er $f'(x_0) = 2x_0$.

■

Sætning 2.7

Når $f(x) = \dfrac{1}{x}$, er differentialkvotienten $f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$.

Bevis
For $f(x) = \frac{1}{x}$ er

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x) - f(x_0) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \\
&= \frac{x_0}{x \cdot x_0} - \frac{x}{x \cdot x_0} \\
&= \frac{-(x - x_0)}{x \cdot x_0} \ .
\end{aligned}$$

Dvs.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\frac{-(x-x_0)}{x \cdot x_0}}{x - x_0} = \frac{-1}{x \cdot x_0} \,.$$

Når $x \to x_0$, vil dette udtryk gå mod $\frac{-1}{x_0 \cdot x_0} = \frac{-1}{x_0^2}$, og derfor er

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2} \,. \qquad \blacksquare$$

Sætning 2.8

Hvis $f(x) = \sqrt{x}$, er differentialkvotienten $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Bevis
For $f(x) = \sqrt{x}$ er

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = \sqrt{x} - \sqrt{x_0} \,.$$

Dette udtryk kan man ikke umiddelbart skrive om, så der er ikke andet at gøre end at regne direkte på $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Her viser det sig at man kan gøre brug af en smart omskrivning:[5]

[5]Man forlænger med $\sqrt{x} + \sqrt{x_0}$. Det viser sig nemlig at man så kan udnytte regnereglen

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \,.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \\
&= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\
&= \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{(x - x_0) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\
&= \frac{x - x_0}{(x - x_0) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \,.
\end{aligned}$$

Dette udtryk har grænseværdien $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \dfrac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}}$, dvs.

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \,. \qquad \blacksquare$$

Tabel 2.6: Diverse funktioner og deres afledte funktioner.

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
e^{kx}	$k\,e^{kx}$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

I tabel 2.6 kan man se nogle yderligere eksempler. Her er det dog ikke differentialkvotienterne der er skrevet op, men i stedet de afledte funktioner.

Eksempel 2.9 Ifølge sætning 2.8 er differentialkvotienten af $f(x) = \sqrt{x}$ givet ved $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Idet $f'(x)$ giver hældningen af tangenterne til grafen, kan man f.eks. beregne at tangenten i punktet $P(4, 2)$ har hældningen

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \,.$$

Dette kan ses på figur 2.7.

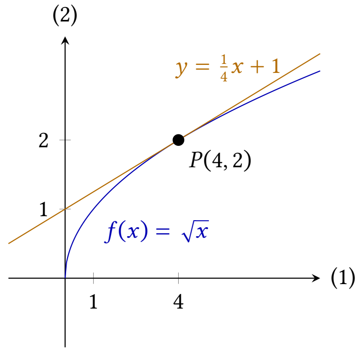
Tangenten er altså en ret linje med ligningen $y = \frac{1}{4}x + b$. Hvis man er interesseret i at finde hele ligningen, kan dette gøres ved at indsætte røringspunktet $P(4, 2)$ i tangentens ligning:

$$2 = \tfrac{1}{4} \cdot 4 + b \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 1 \ .$$

I punktet $P(4, 2)$ har grafen for $f(x) = \sqrt{x}$ altså en tangent med ligningen

$$y = \tfrac{1}{4}x + 1 \ ,$$

hvilket også fremgår af figur 2.7.



Figur 2.7: Grafen for $f(x) = \sqrt{x}$ har i punktet $P(4, 2)$ en tangent som har ligningen $y = \frac{1}{4}x + 1$.

2.4 Sum og differens

Det viser sig at for at finde differentialkvotienten $f'(x_0)$ af en given funktion f, er det ikke nødvendigt at anvende metoden fra foregående afsnit hver gang. Det er tilstrækkeligt at kende den afledte funktion for en række simple funktioner som f.eks. dem fra afsnittet ovenfor. Der gælder nemlig nogle regneregler som kan bruges hvis man skal finde den afledte funktion af en funktion f, som er »bygget op af« simplere funktioner.

Sætning 2.10

Lad p være en differentiabel funktion og c en konstant, og lad funktionen f være givet ved $f(x) = c \cdot p(x)$. Så er

$$f'(x_0) = c \cdot p'(x_0) \ .$$

Bevis
Hvis $f(x) = c \cdot p(x)$ er

$$\begin{aligned} \Delta f &= c \cdot p(x) - c \cdot p(x_0) \\ &= c \cdot (p(x) - p(x_0)) = c \cdot \Delta p \ . \end{aligned}$$

Dvs.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{c \cdot \Delta p}{\Delta x} = c \cdot \frac{\Delta p}{\Delta x} \ .$$

Lader man $x \to x_0$, vil $\frac{\Delta p}{\Delta x} \to p'(x_0)$, og dvs. $c \cdot \frac{\Delta p}{\Delta x} \to c \cdot p'(x_0)$. Altså er

$$f'(x_0) = c \cdot p'(x_0) \ ,$$

og sætningen er hermed bevist. ■

Hvad dette resultat kan bruges til ses i dette eksempel:

Eksempel 2.11 Ifølge sætning 2.6 er differentialkvotienten af $p(x) = x^2$ givet ved $p'(x_0) = 2x_0$. Men hvad er differentialkvotienten af $f(x) = 7x^2$?

Her kan man benytte sætning 2.10. Hvis $f(x) = 7x^2$, så er

$$f(x) = c \cdot p(x) \ , \qquad \text{hvor } c = 7 \text{ og } p(x) = x^2 \ .$$

Da man allerede kender differentialkvotienten af $p(x) = x^2$, får man ifølge sætning 2.10 at

$$f'(x_0) = c \cdot p'(x_0) = 7 \cdot 2x_0 = 14x_0 \ .$$

Man kan altså finde den differentialkvotienten af $f(x) = 7x^2$, blot man kender differentialkvotienten af x^2.

Eksempel 2.12 Skal man finde differentialkvotienten af $f(x) = 4x^3$, kan $f(x)$ skrives som $f(x) = 4 \cdot p(x)$ hvor $p(x) = x^3$.

Et tabelopslag giver at $p'(x_0) = 3x_0^2$. Ifølge sætning 2.10 er

$$f'(x_0) = 4 \cdot p'(x_0) = 4 \cdot 3x_0^2 = 12x_0^2 \ .$$

Sætning 2.13

Lad p og q være to differentiable funktioner, og lad $f(x) = p(x)+q(x)$. Så er

$$f'(x_0) = p'(x_0) + q'(x_0) \ .$$

Bevis
Man anvender definition 2.3 og beregner først

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x) - f(x_0) = (p(x) + q(x)) - (p(x_0) + q(x_0)) \\ &= p(x) - p(x_0) + q(x) - q(x_0) \\ &= \Delta p + \Delta q \ . \end{aligned}$$

Herefter får man

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta p + \Delta q}{\Delta x} = \frac{\Delta p}{\Delta x} + \frac{\Delta q}{\Delta x} \ .$$

Lader man nu $x \to x_0$, vil $\frac{\Delta p}{\Delta x} \to p'(x_0)$ og $\frac{\Delta q}{\Delta x} \to q'(x_0)$ hvilket betyder at

$$f'(x_0) = p'(x_0) + q'(x_0) \ . \qquad \blacksquare$$

Sætning 2.14

Lad p og q være to differentiable funktioner, og lad $f(x) = p(x)-q(x)$. Så er

$$f'(x_0) = p'(x_0) - q'(x_0) \ .$$

Denne sætning minder meget om sætning 2.13, og beviset kan gennemføres på tilsvarende måde.

Eksempel 2.15 Sætningerne 2.10, 2.13 og 2.14 kan anvendes i kombination til at differentiere lidt mere komplicerede funktionsudtryk.[6]

Funktionen

$$f(x) = 4x^2 + 5\ln(x) - 3x$$

er f.eks. sat sammen af de mere simple udtryk x^2, $\ln(x)$ og x, som alle kan findes i tabel 2.6.

[6]Bemærk at man i dette eksempel finder de afledte funktioner i stedet for differentialkvotienterne, dvs. man taler om $f'(x)$ i stedet for $f'(x_0)$.

Bruger man sætning 2.13 og 2.14 får man at

$$f'(x) = \left(4x^2\right)' + (5\ln(x))' - (3x)' \ .$$

Herefter kan man bruge sætning 2.10, så

$$f'(x) = 4 \cdot \left(x^2\right)' + 5 \cdot (\ln(x))' - 3 \cdot (x)' \ .$$

De afledede funktioner af x^2, $\ln(x)$ og x slår man nu op i tabellen. Man får så

$$f'(x) = 4 \cdot 2x + 5 \cdot \frac{1}{x} - 3 \cdot 1$$

hvilket kan reduceres til

$$f'(x) = 8x + \frac{5}{x} - 3 \ .$$

2.5 Produkter

Ser man på de sætninger der ind til nu er bevist, kunne man få den tanke at man altid blot kan differentiere enkeltdele af et funktionsudtryk hver for sig. Dette er dog på ingen måde tilfældet, hvilket næste sætning viser.

Sætning 2.16: Produktreglen

Lad p og q være to differentiable funktioner, og lad $f(x) = p(x) \cdot q(x)$. Så er

$$f'(x_0) = p'(x_0) \cdot q(x_0) + p(x_0) \cdot q'(x_0) \ .$$

Bevis
Når $f(x) = p(x) \cdot q(x)$, er

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x) - f(x_0) \\ &= p(x) \cdot q(x) - p(x_0) \cdot q(x_0) \ . \end{aligned}$$

For at omskrive dette udtryk så det indeholder både Δp og Δq bruger man et trick: Man trækker leddet $p(x_0) \cdot q(x)$ fra og lægger det herefter til igen. Herved ændrer man nemlig ikke noget:

$$\begin{aligned} \Delta f &= p(x) \cdot q(x) - p(x_0) \cdot q(x_0) \\ &= p(x) \cdot q(x) \underbrace{- p(x_0) \cdot q(x) + p(x_0) \cdot q(x)}_{\text{summen af disse to led er 0}} - p(x_0) \cdot q(x_0) \ . \end{aligned}$$

Herefter kan man sætte uden for parentes så

$$\begin{aligned} \Delta f &= (p(x) - p(x_0)) \cdot q(x) + p(x_0) \cdot (q(x) - q(x_0)) \\ &= \Delta p \cdot q(x) + p(x_0) \cdot \Delta q \ . \end{aligned}$$

Så bliver

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta p \cdot q(x) + p(x_0) \cdot \Delta q}{\Delta x} = \frac{\Delta p}{\Delta x} \cdot q(x) + p(x_0) \cdot \frac{\Delta q}{\Delta x} \ .$$

Lader man nu $\Delta x \to 0$, vil

$$\begin{aligned}\frac{\Delta p}{\Delta x} &\to p'(x_0)\\ q(x) &\to q(x_0)\\ p(x_0) &\to p(x_0)\\ \frac{\Delta q}{\Delta x} &\to q'(x_0)\ .\end{aligned}$$

Samlet set får man derfor

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = p'(x_0)\cdot q(x_0) + p(x_0)\cdot q'(x_0)\ ,$$

og dvs.

$$f'(x_0) = p'(x_0)\cdot q(x_0) + p(x_0)\cdot q'(x_0)\ . \qquad \blacksquare$$

Eksempel 2.17 Skal man finde den afledte funktion af $f(x) = \sqrt{x}\cdot\ln(x)$, skriver man $f(x)$ som $f(x) = p(x)\cdot q(x)$ hvor

$$p(x) = \sqrt{x}, \qquad q(x) = \ln(x).$$

Tabelopslag giver at

$$p'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ , \qquad q'(x) = \frac{1}{x}.$$

Sætning 2.16 giver så

$$\begin{aligned}f'(x) &= p'(x)\cdot q(x) + p(x)\cdot q'(x)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln(x) + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\ .\end{aligned}$$

Dette kan så reduceres yderligere til

$$f'(x) = \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}\ .$$

2.6 Sammensatte funktioner og kvotienter

Sammensatte funktioner er funktioner der sat sammen ved at en simpel funktion er »puttet ind i« en anden. Det er funktioner som

$$\begin{aligned}f(x) &= (\ln(x))^2\ , & g(x) &= \sqrt{x^3+4}\ ,\\ h(x) &= e^{6x+x^2}\ , & k(x) &= \ln(x^2+e^x)\ .\end{aligned}$$

Funktionen f er f.eks. en sammensat funktion fordi den kan skrives som $f = p\circ q$[7] hvor de to funktioner p og q er hhv.

$$p(q) = q^2 \quad \text{og} \quad q(x) = \ln(x)\ ,$$

p kan så kaldes den *ydre funktion* og q den *indre funktion*.

Når man skal differentiere en sådan funktion, kan man anvende følgende sætning:

[7] At $f = p\circ q$ betyder som bekendt, at $f(x) = p(q(x))$ for alle x.

Sætning 2.18: Kædereglen

Lad p og q være differentiable funktioner, og lad $f(x) = p(q(x))$ for alle x. Så er

$$f'(x_0) = p'(q(x_0)) \cdot q'(x_0) \; .$$

Bevis

Hvis $f(x_0) = p(q(x_0))$, så bliver

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{p(q(x)) - p(q(x_0))}{x - x_0} \; .$$

Dette kan så skrives som

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{p(q(x)) - p(q(x_0))}{x - x_0} = \frac{p(q(x)) - p(q(x_0))}{q(x) - q(x_0)} \cdot \frac{q(x) - q(x_0)}{x - x_0} \; .$$

Hvis man nu sætter $q = q(x)$ og $q_0 = q(x_0)$, så kan dette skrives som

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{p(q) - p(q_0)}{q - q_0} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta x} \; . \tag{2.1}$$

De to faktorer på højre side af lighedstegnet undersøges nu hver for sig.

Brøken $\frac{p(q)-p(q_0)}{q-q_0}$ kan skrives som $\frac{\Delta p}{\Delta q}$ hvor det er underforstået at p er en funktion af q. Dvs.

$$\frac{p(q) - p(q_0)}{q - q_0} \to p'(q_0) \; , \qquad \text{når } x \to x_0 \; .$$

For brøken $\frac{\Delta q}{\Delta x}$ gælder at

$$\frac{\Delta q}{\Delta x} \to q'(x_0) \; , \qquad \text{når } x \to x_0 \; .$$

Samlet set får man altså fra ligningen (2.1) at

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to p'(q_0) \cdot q'(x_0) \; , \qquad \text{når } x \to x_0 \; .$$

Husker man nu at $q_0 = q(x_0)$ kan dette skrives som $p'(q(x_0)) \cdot q'(x_0)$, dvs. sætningen er bevist. ■

Eksempel 2.19 En funktion f er givet ved forskriften $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$. f kan altså skrives som $f(x) = p(q(x))$ hvor

$$p(q) = \sqrt{q} \quad \text{og} \quad q(x) = x^2 + 3 \; .$$

Disse to funktioner kan differentieres vha. tabelopslag:

$$p'(q) = \frac{1}{2\sqrt{q}} \quad \text{og} \quad q'(x) = 2x \; .$$

Sætning 2.18 giver at

$$f'(x) = p'(q) \cdot q'(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{q}} \cdot 2x \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}} \cdot 2x
\end{aligned}
$$

Ved $(*)$ erstattes q med x^2+3, da $q(x) = x^2+3$.

Udtrykket kan reduceres yderligere, og man får

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \ .$$

Eksempel 2.20 En funktion f er givet ved forskriften $f(x) = e^{x^2}$. For at differentiere f skrives $f(x) = p(q(x))$ hvor

$$p(q) = e^q \ , \qquad q(x) = x^2 \ .$$

Tabelopslag giver

$$p'(q) = e^q \ , \qquad q'(x) = 2x \ .$$

Sætning 2.18 giver

$$f'(x) = p'(q) \cdot q'(x) = e^q \cdot 2x = e^{x^2} \cdot 2x \ .$$

Sætningerne 2.16 og 2.18 kan også bruges til at bevise en sætning om differentiation af kvotienter af funktioner. Der gælder nemlig følgende sætning.

Sætning 2.21: Kvotientreglen

Lad p og q være differentiable funktioner hvor $q(x) \neq 0$ for alle x, og lad $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Så er

$$f'(x_0) = \frac{p'(x_0) \cdot q(x_0) - p(x_0) \cdot q'(x_0)}{q(x_0)^2} \ .$$

Bevis
Man kan omskrive $f(x_0)$ til

$$f(x_0) = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = p(x_0) \cdot \frac{1}{q(x_0)} \ .$$

Dette er et produkt af to funktioner, dvs. ifølge sætning 2.16 er

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= p'(x_0) \cdot \frac{1}{q(x_0)} + p(x_0) \cdot \left(\frac{1}{q(x_0)}\right)' \\
&= \frac{p'(x_0)}{q(x_0)} + p(x_0) \cdot \left(\frac{1}{q(x_0)}\right)' \ . \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

For at komme videre med dette bliver man nødt til at undersøge $\left(\frac{1}{q(x_0)}\right)'$. Her er der tale om den afledte af en sammensat funktion. Ved brug af sætning 2.18 får man så[8]

[8]Funktionen $\left(\frac{1}{q(x)}\right)$ kan siges at være sammensat af $s(q) = \frac{1}{q}$ og $q(x)$. Herefter bruger man at

$$s'(q) = -\frac{1}{q^2} \ .$$

$$\left(\frac{1}{q(x_0)}\right)' = -\frac{1}{q(x_0)^2} \cdot q'(x_0) \ .$$

Indsætter man nu dette resultat i (2.2), får man

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{p'(x_0)}{q(x_0)} + p(x_0) \cdot \left(-\frac{1}{q(x_0)^2} \cdot q'(x_0)\right) \\ &= \frac{p'(x_0)}{q(x_0)} - \frac{p(x_0) \cdot q'(x_0)}{q(x_0)^2} \\ &= \frac{p'(x_0) \cdot q(x_0)}{q(x_0)^2} - \frac{p(x_0) \cdot q'(x_0)}{q(x_0)^2} \\ &= \frac{p'(x_0) \cdot q(x_0) - p(x_0) \cdot q'(x_0)}{q(x_0)^2} \ , \end{aligned}$$

Dvs. $f'(x_0) = \frac{p'(x_0) \cdot q(x_0) - p(x_0) \cdot q'(x_0)}{q(x_0)^2}$. ■

Eksempel 2.22 Lad $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$. Den afledte funktion $f'(x)$ findes ved at skrive $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ hvor

$$p(x) = x^2 \ , \qquad q(x) = e^x \ .$$

Tabelopslag giver

$$p'(x) = 2x \ , \qquad q'(x) = e^x \ .$$

Sætning 2.21 giver at

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{p'(x) \cdot q(x) - p(x) \cdot q'(x)}{(q(x))^2} \\ &= \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} \ . \end{aligned}$$

Dette kan så reduceres yderligere til

$$f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x} \ .$$

Der findes funktioner, hvor det ikke er nok at bruge en enkelt af regnereglerne i sætningerne 2.16, 2.18 og 2.21. Nogle gange er det nødvendigt at kombinere dem.

Her følger derfor et »vildt« eksempel:

Eksempel 2.23 En funktion er givet ved forskriften

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \cdot \ln(x)}} \ , \qquad x > 1 \ .$$

Hvordan differentieres denne funktion?

Først skrives $f(x) = p(q(x))$ hvor

$$p(q) = \frac{1}{q}, \qquad q(x) = \sqrt{x^2 \cdot \ln(x)} \ .$$

Her er det nemt nok at differentiere $p(q)$, men hvad med $q(x)$? Denne deles yderligere op: $q(x) = s(t(x))$ hvor

$$s(t) = \sqrt{t}\ , \qquad t(x) = x^2 \cdot \ln(x)\ .$$

Nu består problemet i at differentiere t. Dette kan gøres ved at skrive t som $t(x) = (n \cdot m)(x)$,

$$n(x) = x^2\ , \qquad m(x) = \ln(x)\ .$$

Her er

$$n'(x) = 2x\ , \qquad m'(x) = \frac{1}{x}\ .$$

Ifølge sætning 2.16 vil man så få

$$t'(x) = n'(x) \cdot m(x) + n(x) \cdot m'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x}\ .$$

Dette kan reduceres til $t'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x$.

Nu har man alt det man skal bruge, og man kan begynde at arbejde sig tilbage gennem de mange delfunktioner:

$$q'(x) = s'(t(x))\cdot t'(x) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot(2x\cdot\ln(x)+x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 \cdot \ln(x)}}\cdot(2x\cdot\ln(x)+x)\ .$$

Dette kan reduceres til

$$q'(x) = \frac{2x \cdot \ln(x) + x}{2\sqrt{x^2 \cdot \ln(x)}}\ .$$

Til sidst kan man derfor finde

$$\begin{aligned} f'(x) = p'(q(x)) \cdot q'(x) &= -\frac{1}{q^2} \cdot \frac{2x \cdot \ln(x) + x}{2\sqrt{x^2 \cdot \ln(x)}} \\ &= -\frac{1}{\left(\sqrt{x^2 \cdot \ln(x)}\right)^2} \cdot \frac{2x \cdot \ln(x) + x}{2\sqrt{x^2 \cdot \ln(x)}}\ . \end{aligned}$$

Dette kan så til sidst reduceres til

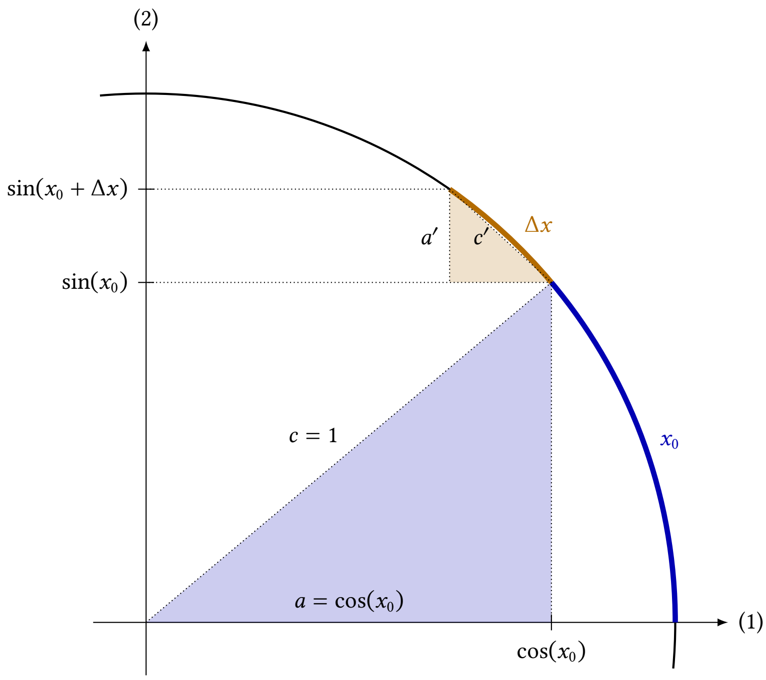
$$f'(x) = -\frac{2\ln(x) + 1}{2x^2 \cdot \ln(x) \cdot \sqrt{\ln(x)}}\ .$$

Ved hjælp af sætningerne 2.10–2.21 og tabelopslag kan man differentiere en hvilken som helst funktion. Afsnittet her afsluttes derfor med en opsummering af disse sætninger:

Sætning 2.24

Følgende regneregler kan anvendes til bestemmelse af en afledt funktion:

$$\begin{aligned} f &= c \cdot p & &\Rightarrow & f' &= c \cdot p'\ . \\ f &= p + q & &\Rightarrow & f' &= p' + q'\ . \\ f &= p - q & &\Rightarrow & f' &= p' - q'\ . \\ f &= p \cdot q & &\Rightarrow & f' &= p' \cdot q + p \cdot q'\ . \\ f &= p \circ q & &\Rightarrow & f' &= (p' \circ q) \cdot q'\ . \\ f &= \frac{p}{q} & &\Rightarrow & f' &= \frac{p' \cdot q - p \cdot q'}{q^2}\ . \end{aligned}$$



Figur 2.8: Et udsnit af enhedscirklen. De to markerede trekanter er næsten ensvinklede hvis Δx er lille. Dvs. $\frac{a'}{c'} \approx \frac{a}{c}$.
Når Δx er lille gælder der tillige at $\Delta x \approx c'$.

2.7 Trigonometriske funktioner

De trigonometriske funktioner sin, cos og tan kan også differentieres. Når man behandler sin og cos som matematiske funktioner på denne måde, er det vigtigt at huske at x altid måles i radianer.

Det viser sig da at der for sin og cos gælder følgende:

Sætning 2.25

For de trigonometriske funktioner sin og cos gælder

1. Hvis $f(x) = \sin(x)$, er $f'(x) = \cos(x)$.
2. Hvis $f(x) = \cos(x)$, er $f'(x) = -\sin(x)$.

Funktionerne sin og cos er altså nærmest hinandens afledte. Bemærk dog at der optræder et minus når man differentierer cos.

For at bevise sætningen kan man se på enhedscirklen da det er ud fra denne sin og cos er defineret. Her bevises kun første del af sætningen.

Bevis
Figur 2.8 viser et udsnit af enhedscirklen hvor der er afsat en vilkårlig buelængde x_0. $\sin(x_0)$ og $\cos(x_0)$ er angivet på akserne. Den store markerede trekant får herved en hypotenuse på 1, og den vandrette katete bliver $a = \cos(x_0)$.

Lægger man en lille buelængde Δx til, kan man lave en ny trekant. Her er hypotenusen $c' \approx \Delta x$ når blot Δx er lille. Den lodrette katete kaldes a'.

For at bestemme $f'(x_0)$ når $f(x) = \sin(x)$ ser man først på

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) \,.$$

På figuren ses at dette svarer til linjestykket a', dvs. $\Delta f = a'$.

Som nævnt er $\Delta x \approx c'$, og altså er

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{a'}{\Delta x} \approx \frac{a'}{c'} \,.$$

Hvis Δx er lille står de to hypotenuser c og c' næsten vinkelret på hinanden. Herved bliver de to markerede trekanter næsten ensvinklede, og der gælder derfor at

$$\frac{a'}{c'} \approx \frac{a}{c} \,.$$

Det betyder så at

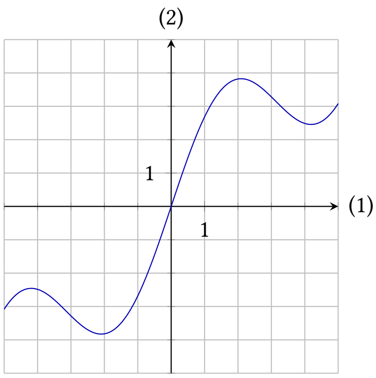
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx \frac{a}{c}$$

når blot Δx er lille. Og jo mindre Δx er, jo bedre gælder tilnærmelsen.

Lader man nu $\Delta x \to 0$, får man derfor

$$f'(x_0) = \frac{a}{c} = \frac{\cos(x_0)}{1} = \cos(x_0) \,. \qquad \blacksquare$$

Et tilsvarende geometrisk bevis for cos overlades som en øvelse til læseren.



Figur 2.9: Grafen for $f(x) = x + 2\sin(x)$.

Eksempel 2.26 På figur 2.9 kan man se grafen for $f(x) = x + 2\sin(x)$. Hvad er den afledte funktion af f?

Da man ved at den afledte funktion af x er 1, og at den afledte funktion af $\sin(x)$ er $\cos(x)$ (ifølge sætning 2.25), bliver

$$f'(x) = 1 + 2\cos(x) \,.$$

Eksempel 2.27 For at finde den afledte funktion af $f(x) = 5 \cdot \sin(3x - 2)$ er det nødvendigt at bruge regnereglen fra sætning 2.18. Funktionen f kan skrives som

$$f(x) = p(3x - 2) \,,$$

hvor $p(t) = 5 \cdot \sin(t)$, dvs. $p'(t) = 5 \cdot \cos(t)$

Fra sætning 2.18 følger da, at

$$f'(x) = 3 \cdot 5 \cdot \cos(3x - 2) = 15 \cdot \cos(3x - 2) \,.$$

Ved hjælp af sætning 2.25 og regnereglen fra sætning 2.21 kan man bevise følgende sætning.

Sætning 2.28

Den afledte funktion af $f(x) = \tan(x)$ er $f'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$.

Bevis

Ud fra definitionen af tangens har man at

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \,.$$

Ifølge sætning 2.21 er den afledte funktion derfor

$$f'(x) = \frac{(\sin(x))' \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (\cos(x))'}{\cos(x)^2} \ ,$$

og bruger man så sætning 2.25, kan dette omskrives til[9]

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos(x)^2} \ . \end{aligned}$$

■

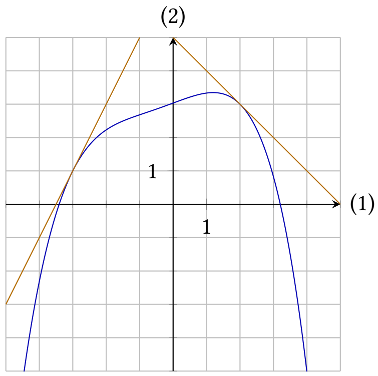
[9] Undervejs udnyttes, at

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1 \ ,$$

hvilket følger af definitionen på cos og sin.

2.8 Øvelser

Øvelse 2.1
Figuren viser grafen for en funktion f samt tangenterne til grafen for f i $x = -3$ og $x = 2$.



a) Bestem ved aflæsning $f'(-3)$ og $f'(2)$.

Øvelse 2.2
Bestem ved at tegne graferne om de følgende tre funktioner er differentiable i $x = 2$:

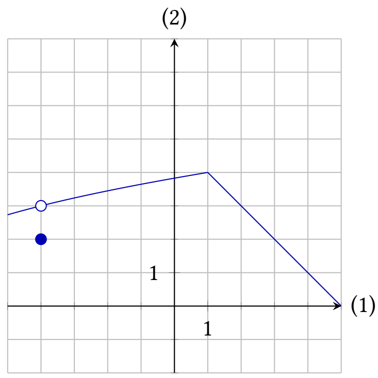
a) $f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & \text{for } x < 2 \\ x^2 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{for } x < 2 \\ x^2 + 1 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$

c) $h(x) = |x - 2|$

Øvelse 2.3
Bestem differentialkvotienten $f'(x_0)$ af $f(x) = 2x^2 - x$ vha. tre-trins-reglen.

Øvelse 2.4
Figuren viser grafen for f. Angiv for hvilke værdier af x denne funktion ikke er differentiabel.



Øvelse 2.5
Brug tre-trins-reglen til at bestemme differentialkvotienten $f'(x_0)$ af $f(x) = x^2 + 3x$.

Bestem herefter

a) $f'(1)$

b) $f'(-4)$

c) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

d) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=5}$

Øvelse 2.6
Bestem den afledte funktion af de følgende funktioner:

a) $f(x) = 4x - 1$

b) $g(x) = x^2 - x$

c) $h(x) = 5x - \sqrt{x}$

d) $k(x) = 3e^x - x^3 + 2x$

Øvelse 2.7
Bestem differentialkvotienten $f'(x_0)$ når

a) $f(x) = 5x - \ln(x)$ og $x_0 = 1$

b) $f(x) = x^2 - 6\sqrt{x}$ og $x_0 = 9$

c) $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x^2}{4}$ og $x_0 = 2$

d) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x$ og $x_0 = 3$

e) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{4} - \dfrac{x^2}{6}$ og $x_0 = 1$

Øvelse 2.8
Bevis sætning 2.14.

Øvelse 2.9
Differentier de følgende funktioner:

a) $f(x) = x \cdot e^x$ b) $g(x) = x^2 \cdot \ln(x)$

c) $h(x) = 4x^2 \cdot \sqrt{x}$ d) $k(x) = 3x \cdot (e^x - 1)$

Øvelse 2.10
Bestem $\frac{df}{dx}$ når

a) $f(x) = 4\sqrt{x} \cdot \ln(x)$

b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 1)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sqrt{x}$

d) $f(x) = (e^x + 1) \cdot (x^2 - 3)$

Øvelse 2.11
Bestem differentialkvotienterne for de følgende funktioner:

a) $f(x) = (3x - 1)^2$ b) $g(x) = e^{2x+9}$

c) $h(x) = \sqrt{7x - 5}$ d) $k(x) = 4 \cdot \ln(3 - x)$

Øvelse 2.12
Bestem de værdier af x for hvilke de nedenstående funktioner har en tangent med hældning 3.

a) $f(x) = x^2 - x$ b) $g(x) = \ln(x) - 2$

c) $h(x) = \sqrt{3x + 1}$ d) $k(x) = \frac{3}{8-x}$

Øvelse 2.13
Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{og} \quad g(x) = 2\sqrt{x} - 3\,.$$

Bestem

a) $(fg)(x)$ b) $(f \circ g)'(x)$ c) $(g \circ f)'(x)$

Øvelse 2.14
Bestem differentialkvotienterne for de følgende funktioner:

a) $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ b) $f_2(x) = \ln(x^2 + 1)$

c) $f_3(x) = \ln(x)^3$ d) $f_4(x) = (e^x + 4)^2$

e) $f_5(x) = 4 \cdot \sqrt{\ln(x) - 3}$ f) $f_6(x) = \frac{1}{x^3+x^2-5}$

Øvelse 2.15
Differentier de følgende funktioner

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{4x}$ b) $g(x) = \dfrac{3x}{\ln(x)}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2}{4 + x}$ d) $k(x) = \dfrac{5 - x^2}{\sqrt{x}}$

Øvelse 2.16
Bestem den afledte af hver af disse funktioner:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x - 1}}{3x}$ b) $g(x) = \ln\left(\dfrac{x - 7}{x}\right)$

c) $h(x) = \sqrt{x} \cdot \dfrac{e^x}{x^2 - 1}$ d) $k(x) = \sqrt{\dfrac{x - 3}{x^2 + 3}}$

Øvelse 2.17
Grafen for funktionen f går gennem punktet $(2, 3)$, og grafen for funktionen g går gennem $(2, -1)$. Desuden er $f'(2) = -4$ og $g'(2) = 5$.

Bestem

a) $(3f)'(2)$ b) $(f + g)'(2)$

c) $(fg)'(2)$ d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

Øvelse 2.18
Grafen for funktionen f har en tangent med hældningen 6 i punktet $(2, 3)$, og funktionen g har forskriften

$$g(x) = \ln(f(x) - 5)\,.$$

a) Bestem $g'(2)$.

Øvelse 2.19
Bestem den afledte funktion for hver af disse funktioner:

a) $f_1(x) = \sin(x) + \cos(x)$
b) $f_2(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$
c) $f_3(x) = \sin(x)^2$
d) $f_4(x) = \cos(4x - 5)$
e) $f_5(x) = x \cdot \sin(x)$
f) $f_6(x) = \dfrac{\sin(x)}{5 - x}$
g) $f_7(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x)$
h) $f_8(x) = 4\cos(\sqrt{x} + 2)$

Øvelse 2.20
Den trigonometriske funktion sec (sekans) er defineret ved

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad x \neq n\pi .$$

Vis at

$$(\sec)'(x) = \frac{\tan(x)}{\cos(x)} \quad \text{og} \quad (\sec)'(x) = \sec(x) \cdot \tan(x) .$$

Øvelse 2.21
Differentier de følgende funktioner:

a) $f(x) = \sqrt{\sin(x)^2 + 1}$
b) $g(x) = \dfrac{\sin(x) - 1}{\cos(x)}$
c) $h(x) = \sin(x^3)$
d) $k(x) = \sin(\cos(x))$

Øvelse 2.22
Bestem differentialkvotienten $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ når

a) $f(x) = \dfrac{\cos(x) + 1}{\sin(x)}$
b) $f(x) = \sqrt{\cos(x) + 1}$
c) $f(x) = \sin(x)^3$
d) $f(x) = \cos(\sin(x) - 1)$
e) $f(x) = \dfrac{\sin(x) + 1}{\cos(x) + \sin(x)}$

3 Tangenter

Den afledte funktion giver tangenthældningen i et vilkårligt punkt på grafen. Har man en tangenthældning og et punkt, kan man derfor bestemme en ligning for tangenten. Her følger et par eksempler.

Eksempel 3.1 Funktionen $f(x) = x^2 + 4x + 6$ har en tangent i punktet $P(-1, f(-1))$. Hvad er tangentens ligning?

Tangenten er en ret linje, så den har ligningen $y = ax + b$. Man skal altså bestemme de to tal a og b for at kunne skrive ligningen op. a er tangentens hældning, og den er givet ved $f'(x)$, derfor bestemmer man først $f'(x)$:

$$f'(x) = 2x + 4 \cdot 1 + 0 = 2x + 4 \ .$$

Førstekoordinaten til punktet er $x_0 = -1$, derfor er tangentens hældning

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 4 = 2 \ ,$$

og tangentens ligning er altså $y = 2x + b$.

For at kunne bestemme hele ligningen skal man kende det punkt i hvilket tangenten rører grafen. Førstekoordinaten er $x_0 = -1$, andenkoordinaten er

$$y_0 = f(-1) = (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 6 = 1 - 4 + 6 = 3 \ .$$

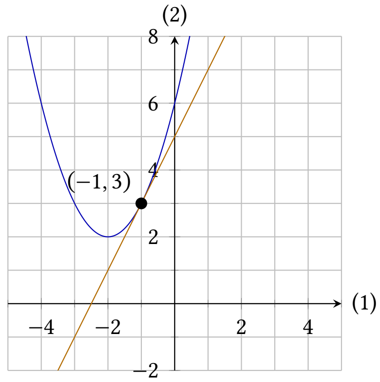
Tangentens røringspunkt er derfor $(-1, 3)$. Dette punkt indsættes i tangentens ligning, dvs.

$$3 = 2 \cdot (-1) + b \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 5 \ .$$

Altså er tangentens ligning

$$y = 2x + 5 \ .$$

Grafen og tangenten kan ses på figur 3.1.



Figur 3.1: Grafen for $f(x) = x^2 + 4x + 6$ har en tangent med ligningen $y = 2x + 5$ i punktet $P(-1, 3)$.

Eksempel 3.2 Funktionen $g(x) = 3x + \ln(x)$ har en tangent i punktet $P(1, f(1))$.

For at bestemme tangentens ligning bestemmer man først

$$g'(x) = 3 + \frac{1}{x} \ .$$

Tangentens hældning er så

$$a = f'(1) = 3 + \frac{1}{1} = 4 \ ,$$

og ligningen er $y = 4x + b$.

For at bestemme b udregner man andenkoordinaten til røringspunktet

$$y_0 = f(1) = 3 \cdot 1 + \ln(1) = 3 \ ,$$

og dette tal sættes sammen med $x_0 = 1$ ind i tangentens ligning:

$$3 = 4 \cdot 1 + b \qquad \Leftrightarrow \qquad b = -1.$$

Altså er tangentens ligning

$$y = 4x - 1 \ .$$

Som det ses af de to eksempler, bruger man samme fremgangsmåde hver gang man skal bestemme en tangentligning i et punkt. Der kunne derfor måske være en fordel i at samle hele proceduren i én formel. Dette er gjort i følgende sætning.

Sætning 3.3

Lad der været givet en differentiabel funktion $f(x)$. Tangenten til grafen for f i punktet $P(x_0, f(x_0))$ har da ligningen

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \ .$$

Bevis
Tangenten er en ret linje, så den har ligningen $y = ax + b$. Da $f'(x)$ giver tangenthældningen, og tangenten rører grafen i $P(x_0, f(x_0))$, må tangentens hældning være

$$a = f'(x_0) \ .$$

Tangentens ligning kan altså skrives som

$$y = f'(x_0) \cdot x + b \ . \tag{3.1}$$

For at bestemme skæringen med andenaksen, b, indsættes det kendte punkt[1] $P(x_0, f(x_0))$ i tangentens ligning som så løses for b:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b \qquad \Leftrightarrow \qquad b = -f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) \ .$$

Dette udtryk for b sættes ind i tangentligningen (3.1), og man får

$$y = f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$$

som ved at sætte uden for parentes kan skrives som

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \ . \qquad \blacksquare$$

Her følger et par eksempler på anvendelsen af formlen.

[1] Husk at både grafen for f og tangenten går gennem $P(x_0, f(x_0))$, dvs. dette punkt skal passe ind i tangentens ligning.

Eksempel 3.4 Funktionen $f(x) = 3x^2 + 10$ har en tangent i punktet $P(5, f(5))$. For at bestemme tangentens ligning benyttes formlen

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

med $x_0 = 5$, dvs.

$$y = f'(5) \cdot (x - 5) + f(5) \; .$$

Før formlen kan bruges, skal man kende $f'(x)$:

$$f'(x) = 3 \cdot 2x + 0 = 6x \; .$$

Herefter beregner man

$$\begin{aligned} f'(5) &= 6 \cdot 5 = 30 \\ f(5) &= 3 \cdot 5^2 + 10 = 85 \; . \end{aligned}$$

Ved indsættelse i formlen fås ligningen

$$y = 30 \cdot (x - 5) + 85$$

som reduceres til

$$y = 30x - 65 \; .$$

Eksempel 3.5 Funktionen $g(x) = (7x + 1) \cdot \mathrm{e}^x$ har en tangent i punktet $P(0, g(0))$.

Tangenten har ligningen

$$y = g'(0) \cdot (x - 0) + g(0) = g'(0) \cdot x + g(0) \; .$$

Nu finder man[2]

$$g'(x) = 7 \cdot \mathrm{e}^x + (7x + 1) \cdot \mathrm{e}^x = (7x + 8) \cdot \mathrm{e}^x \; .$$

[2]Funktionen differentieres vha. produktreglen, sætning 2.16.

Dvs.

$$\begin{aligned} g'(0) &= (7 \cdot 0 + 8) \cdot \mathrm{e}^0 = 8 \cdot 1 = 8 \\ g(0) &= (7 \cdot 0 + 1) \cdot \mathrm{e}^0 = 1 \cdot 1 = 1 \; . \end{aligned}$$

Indsætter man dette i udtrykket ovenfor, når man frem til ligningen

$$y = 8x + 1 \; .$$

3.1 Bestemmelse af røringspunkter

Hvis man kender forskriften for en funktion og et punkt på grafen, kan man bestemme en ligning for tangenten til grafen i dette punkt. Men det er også muligt at regne den anden vej: Hvis man kender tangenten, kan man finde røringspunktet.

I dette afsnit bliver der vist nogle eksempler.

Eksempel 3.6 En funktion er givet ved forskriften $f(x) = -x^2 + 3x + 1$.

Grafen for funktionen har en tangent med ligningen $y = x + 2$. Hvor på grafen er røringspunktet for denne tangent?

Den afledte funktion er

$$f'(x) = -2x + 3 ,$$

og den giver tangenthældningen i ethvert punkt på grafen.

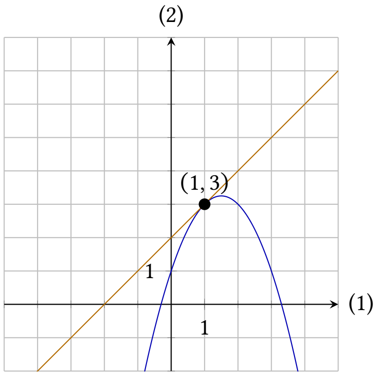
Den tangent man kender ligningen for, har hældningen 1, dvs. $f'(x) = 1$ i røringspunktet. Det giver ligningen

$$-2x + 3 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1 .$$

Tangentens røringspunkt ligger altså ud for 1 på førsteaksen. Nu mangler man blot andenkoordinaten som er

$$f(1) = -1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 3 .$$

Røringspunktet har altså koordinaterne $(1, 3)$, se figur 3.2.



Figur 3.2: Tangenten $y = x+2$ rører grafen for $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ i punktet $(1, 3)$.

Eksempel 3.7 Funktionen f er givet ved

$$f(x) = x - \frac{4}{x} + 3 , \quad x > 0 .$$

Grafen for f har en tangent med hældning 2. Hvor er denne grafs røringspunkt, og hvad er tangentens ligning?

Da det er $f'(x)$ der er tangenthældningen, skal man her finde ud af hvornår $f'(x) = 2$. Først finder man derfor $f'(x)$,

$$f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2} , \quad x > 0 .$$

Herefter løser man ligningen $f'(x) = 2$,

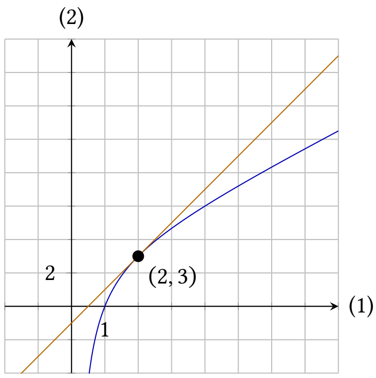
$$1 + \frac{4}{x^2} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{4}{x^2} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -2 \ \vee \ x = 2 .$$

Der er to løsninger til ligningen, men da $f(x)$ kun er defineret for $x > 0$ kasseres den negative løsning. Den søgte førstekoordinat til røringspunktet er så $x = 2$.

Andenkoordinaten til røringspunktet er

$$f(2) = 2 - \frac{4}{2} + 3 = 3 ,$$

og røringspunktet har altså koordinaterne $(2, 3)$, se figur 3.3.



Figur 3.3: Grafen for $f(x) = x - \frac{4}{x} + 3$ har en tangent med hældning 2 i punktet $(2, 3)$.

Tangentens ligning er ifølge sætning 3.3 givet ved

$$y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2) ,$$

men da man allerede kender tangentens hældning $f'(2) = 2$ og har beregnet $f(2) = 3$, bliver denne ligning til

$$y = 2 \cdot (x - 2) + 3 ,$$

som kan reduceres til

$$y = 2x - 1 .$$

Eksempel 3.8 Grafen for funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 - 21x + 5$ har to tangenter med hældningen 3. Hvad er røringspunkterne for disse tangenter?

Tangenternes hældning er 3, dvs. $f'(x) = 3$. For at løse denne ligning skal man først bestemme $f'(x)$,

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \cdot 2x - 21 \cdot 1 = 3x^2 - 6x - 21 \ .$$

Ligningen $f'(x) = 3$ er derfor andengradsligningen

$$3x^2 - 6x - 21 = 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x^2 - 6x - 24 = 0 \ .$$

Løser man denne ligning, finder man løsningerne

$$x = -2 \ \vee \ x = 4 \ .$$

De to røringspunkter er altså $(-2, f(-2))$ og $(4, f(4))$. De to andenkoordinater kan nu bestemmes,

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 21 \cdot (-2) + 5 = 27 \\ f(4) &= 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 21 \cdot 4 + 5 = -63 \ . \end{aligned}$$

De to røringspunkter er altså $(-2, 27)$ og $(4, -63)$. I disse to punkter har grafen for f tangenter med hældning 3.

Hvis man er interesseret i at finde ligningerne for disse to tangenter, kan det gøres på samme måde som i eksempel 3.7.

Eksempel 3.9 I eksempel 3.8 så man at grafen for $f(x) = x^3 - 3x^2 - 21x + 5$ har to tangenter med hældning 3. Findes der en hældning a så grafen har præcis én tangent med denne hældning?

Dette spørgsmål er lidt mere komplekst, men idet man finder røringspunkter for tangenterne ved at løse ligningen $f'(x) = a$ for en bestemt hældning a, kan spørgsmålet oversættes til det følgende: Findes der et tal a så ligningen

$$f'(x) = a \tag{3.2}$$

har præcis én løsning?

Fra eksempel 3.8 har man at

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 21 \ ,$$

så ligningen (3.2) bliver

$$3x^2 - 6x - 21 = a \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x^2 - 6x - 21 - a = 0 \ .$$

Dette er en andengradsligning. Hvis denne ligning skal have præcis én løsning, skal dens diskriminant være lig 0. Diskriminanten for denne ligning bliver[3]

$$d = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-21 - a) = 36 - 12 \cdot (-21 - a) = 288 + 12a \ .$$

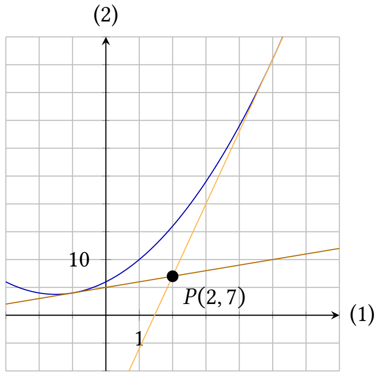
Hvis dette skal give 0, skal

$$288 + 12a = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 12a = -288 \qquad \Leftrightarrow a = -24 \ .$$

[3] Husk at diskriminanten er $d = B^2 - 4AC$, hvor A, B og C er ligningens koefficienter. (De skrives her som A, B og C fordi koefficienten til andengradsleddet ikke må hedde a da det er tangentens hældning.)

Der findes altså præcis én tangent til grafen med hældning $a = -24$.

Faktisk kan man ved at se nærmere på diskriminanten konstatere at hvis $a > -24$, findes der to tangenter med hældningen a; mens der ingen tangenter findes med hældningen a hvis $a < -24$.



Figur 3.4: Grafen for $f(x) = x^2 + 3x + 6$ har to tangenter, der går gennem $P(2,7)$.

Eksempel 3.10 I dette eksempel ses på grafen for funktionen $f(x) = x^2 + 3x + 6$. Hvor mange af grafens tangenter går også gennem punktet $P(2,7)$?

At svare på dette spørgsmål er ikke helt simpelt idet punktet P ikke ligger på grafen. På figur 3.4 kan man se et billede af situationen; her kan man også se at der er to tangenter til grafen for f der går gennem P.

Ifølge sætning 3.3 er tangentens ligning

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \ .$$

Problemet består nu i at finde frem til røringspunkterne for de tangenter der går gennem $P(2,7)$. Røringspunktet er defineret ud fra dets førstekoordinat x_0, men den kender man ikke.

Til gengæld ved man at tangenterne går gennem $P(2,7)$, så disse koordinater skal passe ind i tangentens ligning, dvs. man har

$$7 = f'(x_0) \cdot (2 - x_0) + f(x_0) \ . \tag{3.3}$$

For at kunne komme videre med denne ligning er det nødvendigt at kende $f'(x)$ som findes ved at differentiere f:

$$f'(x) = 2x + 3 \ .$$

Dette kan sammen med funktionens forskrift indsættes i ligningen (3.3) så man får ligningen

$$7 = (2x_0 + 3) \cdot (2 - x_0) + (x_0^2 + 3x_0 + 6)$$

som kan reduceres til

$$7 = -2x_0^2 + x_0 + 6 + x_0^2 + 3x_0 + 6$$

der igen kan reduceres så man ender med andengradsligningen

$$x_0^2 - 4x_0 - 5 = 0 \ .$$

Denne ligning har løsningen

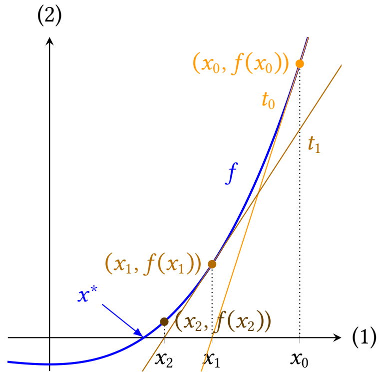
$$x_0 = -1 \ \vee \ x_0 = 5 \ .$$

Idet der er to røringspunkter, er der altså to tangenter. Røringspunkternes andenkoordinater og tangenternes ligninger kan herefter bestemmes ved at gå frem som i eksempel 3.4.

3.2 Newtons metode

Newtons metode er en metode til ligningsløsning vha. tangenter til en graf. Metoden har den fordel at den er hurtig. Ideen bag metoden er at bestemme løsninger til ligninger ved at bestemme nulpunkter for funktioner.

Figur 3.5 viser grafen for en funktion der har et nulpunkt x^*. Man begynder med at gætte på en løsning x_0, dvs. vælge en værdi af x som man kan se ligger tæt på løsningen.



Figur 3.5: Bestemmelse af et nulpunkt vha. Newtons metode.

Man tegner så tangenten t_0 til grafen i punktet $(x_0, f(x_0))$. Tangenten er en ret linje, så man kan beregne dens skæring x_1 med førsteaksen. Ifølge sætning 3.3 har tangenten i $(x_0, f(x_0))$ nemlig ligningen

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \ .$$

Hvis denne linje skærer førsteaksen i x_1, vil der derfor gælde at

$$0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \ .$$

Nu tegner man tangenten t_1 i $(x_1, f(x_1))$, og finder dennes skæring x_2 med førsteaksen. Jf. ovenstående argument, må der gælde at

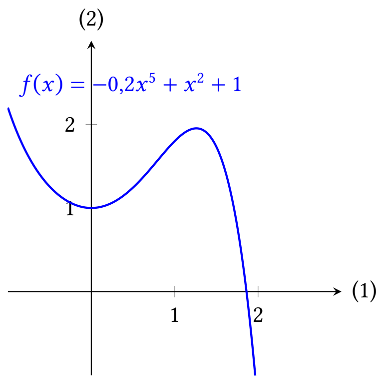
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \ .$$

På denne måde kan man iterativt regne sig frem til bedre og bedre tilnærmelser til x^* ved at starte med et gæt x_0 og herefter beregne sekvensen $x_1, x_2, \ldots$, hvor

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ . \tag{3.4}$$

Hvis $f(x_n) = 0$, følger det af formlen at $x_{n+1} = x_n$, dvs. når x_n er det søgte nulpunkt, vil x_{n+1} give det samme tal, osv. Man ved altså at når sekvensen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ giver samme værdi for to følgende x'er, så har man fundet nulpunktet (med den præcision man foretager sine beregninger med).

Eksempel 3.11 Figur 3.6 viser grafen for funktionen $f(x) = -0{,}2x^5 + x^2 + 1$. Det ses at funktionen har et nulpunkt tæt på $x = 2$.



Figur 3.6: Grafen for $f(x) = -0{,}2x^5 + x^2 + 1$.

Newtons metode kan anvendes til at bestemme dette nulpunkt. Vi har at $f(x) = -0{,}2x^5 + x^2 + 1$, dvs.

$$f'(x) = -x^4 + 2x \ ,$$

og formlen (3.4) bliver

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-0{,}2x_n^5 + x_n^2 + 1}{-x_n^4 + 2x_n} \ .$$

Begynder man med startgættet $x_0 = 2$, får man

$$x_1 = 2 - \frac{-0{,}2 \cdot 2^5 + 2^2 + 1}{-2^4 + 2 \cdot 2} = 1{,}88333$$

$$x_2 = 1{,}88333 - \frac{-0{,}2 \cdot 1{,}88333^5 + 1{,}88333^2 + 1}{-1{,}88333^4 + 2 \cdot 1{,}88333} = 1{,}86157$$
$$x_3 = 1{,}86157 - \frac{-0{,}2 \cdot 1{,}86157^5 + 1{,}86157^2 + 1}{-1{,}86157^4 + 2 \cdot 1{,}86157} = 1{,}86087$$
$$x_4 = 1{,}86807 - \frac{-0{,}2 \cdot 1{,}86807^5 + 1{,}86807^2 + 1}{-1{,}86807^4 + 2 \cdot 1{,}86807} = 1{,}86087 \ .$$

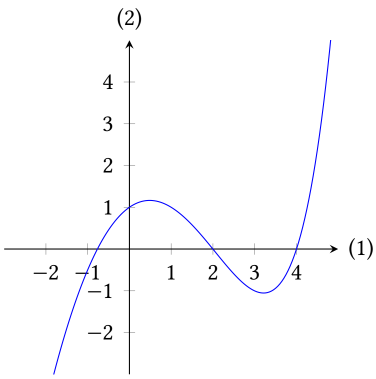
Da $x_3 = x_4$, ved man at det søgte nulpunkt med 5 decimaler er givet ved 1,86807. Dette er i øvrigt det samme som man finder ved anvendelse af et CAS-værktøj.

Selve udregningerne i Newtons metode bliver hurtigt besværlige, og de foretages derfor nemmest i et CAS-værktøj.

Eksempel 3.12 Her vises, hvordan man kan løse ligningen $2^x = x^2$ vha. Newtons metode i et CAS-værktøj. Først omskrives ligningen til

$$2^x - x^2 = 0 \ .$$

At løse ligningen svarer derfor til at finde nulpunkter for funktionen $f(x) = 2^x - x^2$. Funktionen ses tegnet på figur 3.7.



Figur 3.7: Grafen for $f(x) = 2^x - x^2$.

Nu definerer man de følgende to funktioner i sit CAS-værktøj

$$f(x) = 2^x - x^2$$
$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \ .$$

Bemærk at funktionen $g(x)$ svarer til formlen (3.4).

På figur 3.7 kan man se at f har tre nulpunkter, det ene ligger i nærheden af $x = -1$. Man beregner derefter vha. sit CAS-værktøj

$$g(-1) = -0{,}78692$$
$$g(-0{,}78692) = -0{,}76684$$
$$g(-0{,}76684) = -0{,}76666$$
$$g(-0{,}76666) = -0{,}76666 \ .$$

Som man kan se ændrer den sidste beregning ikke på tallet, dvs. $-0{,}76666$ er det søgte nulpunkt. På samme måde kan man bestemme de sidste to nulpunkter, som er $x = 2$ og $x = 4$.

Newtons metode er altså en hurtig metode til at løse ligninger der ellers ikke vil kunne løses. Men metoden virker desværre ikke altid. Funktionen f skal selvfølgelig være differentiabel, idet formlen (3.4) jo indeholder $f'(x)$. Derudover er der dog også andre ting der kan gå galt.

1. Hvis $f'(x_n)$ på et tidspunkt i sekvensen giver 0, kan man ikke komme videre med beregningen

   $$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ ,$$

   da man jo ikke må dele med 0. Dette svarer til at man har ramt et punkt på grafen med en vandret tangent – og så er der ingen skæring med førsteaksen.

2. Hvis funktionen f har flere nulpunkter, risikerer man at finde et andet nulpunkt, end det man egentlig ledte efter.
3. Hvis $f(x)$ slet ikke har et nulpunkt, så giver Newtons metode en kaotisk følge af tal som ikke ender med en stabil værdi.
4. Hvis man vælger et startgæt der ligger for langt fra nulpunktet, kan man risikere at få en sekvens af tal der bevæger sig længere og længere væk fra nulpunktet, frem for tættere på.
5. Man kan risikere at startgættet fører til at sekvensen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ cykler mellem 2 værdier. Hvordan det ser ud kan ses i eksemplet nedenfor.

Som man bemærker, kan de fleste af problemerne løses ved at tegne grafen for f sådan at man kan se om den overhovedet har nulpunkter, og hvordan man skal vælge sit startgæt så det ligger tæt på det nulpunkt man er interesseret i.

Eksempel 3.13 Her ses på funktionen $f(x) = x^3 - 2x + 2$. Denne funktion har et nulpunkt som skal findes med Newtons metode. Den afledte funktion er $f'(x) = 3x^2 - 2$. Som startgæt vælges $x_0 = 0$.

Formel (3.4) giver så

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 - \frac{0^3 - 2\cdot 0 + 2}{3\cdot 0^2 - 2} = 1 \\ x_2 &= 1 - \frac{1^3 - 2\cdot 1 + 2}{3\cdot 1^2 - 2} = 0\ . \end{aligned}$$

Idet $x_2 = 0$ som jo også var startgættet, vil talfølgen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ give $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ og aldrig nå frem til en stabil værdi. Problemet kan heldigvis løses ved at vælge et bedre startgæt.

3.3 Øvelser

Øvelse 3.1
Bestem en ligning for tangenten til grafen for den givne funktion i punktet:

a) $f(x) = x^2 + 1\ , \quad (3, 10)$
b) $g(x) = 3x - x^2\ , \quad (1, 2)$
c) $h(x) = 2\ln(x) + 5\ , \quad (1, 5)$

Øvelse 3.2
Bestem en ligning for tangenten til grafen for den givne funktion i punktet:

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 4\ , \quad (1, f(1))$
b) $g(x) = \mathrm{e}^x - 4x\ , \quad (0, g(0))$

Øvelse 3.3
Bestem en ligning for tangenten til grafen for den givne funktion i punktet:

a) $f(x) = 8\sqrt{x} + 3x\ , \quad (4, f(4))$
b) $g(x) = \mathrm{e}^x \cdot (x^2 + 1)\ , \quad (0, g(0))$
c) $h(x) = \sqrt{3x+1}\ , \quad (5, h(5))$

Øvelse 3.4
Grafen for funktionen $f(x) = x^2 + 5x$ har en tangent med hældning 3.

a) Bestem røringspunktet for denne tangent.

Øvelse 3.5
Grafen for funktionen $g(x) = x^3 - x^2 + x + 4$ har to tangenter med hældning 1.

Bestem røringspunkterne for disse tangenter, og bestem en ligning for hver af tangenterne.

Øvelse 3.6
Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x) = x^2 - 5x + 7 .$$

Grafen for funktionen f har en tangent t i punktet $P(2, f(2))$.

a) Bestem en ligning for t.

Grafen har en anden tangent s, som står vinkelret på t.

b) Bestem røringspunktet for s.
c) Bestem en ligning for s.

Øvelse 3.7
En tangent til grafen for $f(x) = \sqrt{2x + 10}$ har røringspunktet $(x_0, 4)$.

a) Bestem x_0.
b) Bestem en ligning for tangenten.

Øvelse 3.8
Funktionen f givet ved

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 3}$$

har to vandrette tangenter.

Bestem røringspunkterne for disse tangenter.

Øvelse 3.9
Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} .$$

For to værdier af tallet k er linjen med ligningen $y = x + k$ en tangent til grafen for f.

a) Bestem de to værdier af k.

Øvelse 3.10
Funktionen f er givet ved

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 1 .$$

Grafen for f har præcis én tangent med hældning a.

a) Bestem tallet a.

Øvelse 3.11
Funktionen f er givet ved

$$f(x) = x^2 + 3x - 6 .$$

Grafen for f har to tangenter som begge går gennem punktet $P(2, -5)$ der ikke ligger på grafen.

a) Bestem en ligning for hver af disse tangenter.

Øvelse 3.12
En *normal* er en linje der står vinkelret på tangenten i tangentens røringspunkt.

Bestem en ligning for normalen til grafen for

$$f(x) = \frac{1 - x}{x^2 + 1}$$

i punktet $P(1, f(1))$.

Øvelse 3.13
Bestem nulpunktet for funktionen

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x^2 - 4$$

vha. Newtons metode.

Øvelse 3.14
Bestem løsningerne til ligningen

$$5 \cdot \sqrt{x + 4} = x^3 + x^2 + 10 ,$$

vha. Newtons metode.

Øvelse 3.15
Brug Newtons metode til at løse ligningen

$$x^3 = 3^x$$

med 10 decimalers præcision.

4 Monotoniforhold og ekstrema

Hvis en funktion opfører sig på den måde at funktionsværdien bliver større når den uafhængige variabel bliver større, kalder man den for en *voksende* funktion. Forholder det sig til gengæld sådan at funktionsværdien bliver mindre når den uafhængige variabel bliver større, kaldes funktionen *aftagende*.

Definition 4.1

Lad en funktion f være defineret på et interval.

1. Hvis der for ethvert sæt af to vilkårlige tal x_1, x_2 i intervallet gælder
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)\ ,$$
kaldes funktionen *voksende* i intervallet.
2. Hvis der for ethvert sæt af to vilkårlige tal x_1, x_2 i intervallet gælder
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\ ,$$
kaldes funktionen *aftagende* i intervallet.

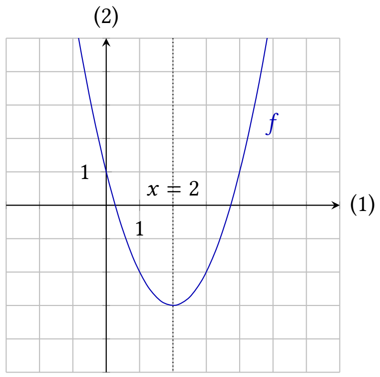
Bemærk her at definitionen handler om hvordan funktionen opfører sig på et *interval*. Hvis man blot kigger på et enkelt punkt giver det ikke mening at tale om hvorvidt funktionen er voksende eller aftagende. Egenskaberne *voksende* og *aftagende* knytter sig altså til intervaller, ikke til punkter.

Eksempel 4.2 Grafen for funktionen $f(x) = 2x + 1$ er en ret linje med positiv hældning. Denne funktion er derfor voksende.

En ret linje med negativ hældning er omvendt grafen for en aftagende funktion (det kunne f.eks. være $f(x) = -4x + 3$).

En funktion der er enten voksende overalt eller aftagende overalt, kaldes en *monoton* funktion. Men det er ikke alle funktioner der er monotone. Der findes mange funktioner som er voksende nogle steder og aftagende andre steder.

Når man beskriver hvor funktionen vokser, og hvor den aftager, siger man at man beskriver funktionens *monotoniforhold*.



Figur 4.1: Grafen for $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

En funktions monotoniforhold finder man ved at opdele førsteaksen i de intervaller hvor funktionen er voksende, og de intervaller hvor funktionen er aftagende.

Eksempel 4.3 På figur 4.1 kan man se grafen for funktionen

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 .$$

Der er også indtegnet et lodret linjestykke ud for $x = 2$. Man kan se at på venstre side af linjestykket er funktionen aftagende, mens den er voksende på højre side.

Funktionens monotoniforhold er så at $f(x)$ er aftagende når $x \leq 2$, og voksende når $x \geq 2$.

I eksempel 4.3 blev monotoniforholdene bestemt ved aflæsning. Man kan altid tegne grafen for en given funktion og bestemme monotoniforholdene ved aflæsning, men det giver en begrænsning i præcision.

Derfor kunne det være smart hvis man i stedet kunne regne ud hvor grafen skifter fra at være aftagende til at være voksende, eller omvendt, hvis blot man kender funktionens forskrift.

Fra eksempel 4.2 har man at hvis grafen for en funktion er en ret linje, er dens monotoniforhold bestemt af hældningskoefficienten. Er hældningen positiv, er funktionen voksende; er den negativ, er funktionen aftagende.

Tangenterne til grafen for en funktion er netop rette linjer, og deres hældningskoefficienter er bestemt ved $f'(x)$ derfor giver følgende sætning intuitivt mening:

Sætning 4.4

Hvis funktionen f er differentiabel, gælder der

1. Hvis f er voksende i intervallet $[a; b]$, er $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in \,]a; b[$.
2. Hvis f er aftagende i intervallet $[a; b]$, er $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in \,]a; b[$.
3. Hvis f er konstant i intervallet $[a; b]$, er $f'(x) = 0$ for alle $x \in \,]a; b[$.

Her er det værd at bemærke at når $f(x)$ er voksende, så er tangenthældningen ikke nødvendigvis positiv i hele intervallet. Den kan udmærket være 0 på et stykke. Det følger af definition 4.1 hvor det netop heller ikke kræves at $f(x_1)$ er større end $f(x_2)$ når $x_1 > x_2$, men blot større end *eller lig med*. Både voksende og aftagende funktioner kan således være konstante på et interval.[1]

[1] Faktisk kan man udlede af definition 4.1 at en konstant funktion både er voksende og aftagende. Det virker selvmodsigende, men er ikke desto mindre tilfældet.

Sætning 4.4 kan bruges til at sige noget om $f'(x)$ hvis man allerede ved om funktionen er voksende eller aftagende. Normalt vil man i stedet forsøge at bestemme monotoniforholdene ud fra et kendskab til $f'(x)$. Her gælder følgende:

Sætning 4.5: Monotonisætningen

For en differentiabel funktion $f(x)$ gælder at

1. Hvis $f'(x) > 0$ for alle x i et interval $]a; b[$, er f voksende i $[a; b]$.
2. Hvis $f'(x) < 0$ for alle x i et interval $]a; b[$, er f aftagende i $[a; b]$.
3. Hvis $f'(x) = 0$ for alle x i et interval $]a; b[$, er f konstant i $[a; b]$.

Hvis man skal bestemme monotoniforholdene for en funktion f, skal man altså undersøge f' for at finde ud af hvornår $f'(x)$ går fra at være positiv til at være negativ, eller omvendt.

Går $f'(x)$ fra at være positiv til at være negativ, må værdien af $f'(x)$ passere 0. Altså skal man finde ud af hvornår $f'(x) = 0$. Dette kan illustreres med et eksempel.

Eksempel 4.6 Her ses på samme funktion som i eksempel 4.3,

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \ .$$

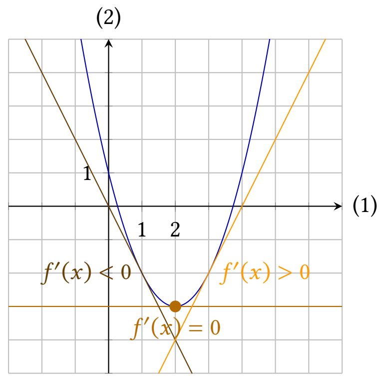
For at finde ud af hvornår grafen går fra at være voksende til at være aftagende, skal man finde ud af hvor $f'(x) = 0$. Først bestemmer man derfor $f'(x)$,

$$f'(x) = 2x - 4 \ .$$

Ligningen $f'(x) = 0$ bliver derfor

$$2x - 4 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2 \ .$$

Ud for $x = 2$ har grafen derfor en tangent med hældning 0, dvs. en vandret tangent. Dette kan også ses på figur 4.2.



Figur 4.2: Grafen for $f(x) = x^2 - 4x + 1$ er aftagende før $x = 2$ og voksende efter $x = 2$. Ud for $x = 2$ er der en vandret tangent.

På grafen kan man se at funktionen er aftagende før $x = 2$ og voksende efter. Har man ikke grafen, kan man finde frem til fortegnet for $f'(x)$ ved beregning.

Skal man finde ud af om $f'(x)$ er positiv eller negativ når $x < 2$, vælger man et tal mindre end 2 som man sætter ind i forskriften for f'. Et tal mindre end 2 kunne f.eks. være 0. Her får man

$$f'(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4 \ .$$

Da $-4 < 0$, konkluderer man at $f'(x)$ er negativ for alle $x < 2$, dvs. her er f aftagende.[2]

På samme måde kan man vælge et tal større end 2, f.eks. 3, og beregne

$$f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 > 0 \ ,$$

dvs. $f'(x)$ er positiv for $x > 2$, og $f(x)$ er altså voksende for disse værdier af x.

Monotoniforholdene for f er altså alt i alt, at $f(x)$ er aftagende for $x \leq 2$ og voksende for $x \geq 2$.[3]

[2] Fra tidligere ved man at $f'(x)$ kun giver 0 for $x = 2$. Derfor vil værdien af $f'(x)$ have samme fortegn for alle tal $x < 2$, og det er altså kun nødvendigt at undersøge fortegnet for $f'(x)$ for ét tal mindre end 2; her var det $x = 0$.

[3] Tallene 0 og 3 som man satte ind i forskriften for $f'(x)$ indgår altså ikke i monotoniforholdene. Det var blot to tilfældige tal mindre hhv. større end 2 som blev indsat for at finde fortegnet for $f'(x)$ når x er større/mindre end 2.

4.1 Fortegnslinje

Et redskab man ofte anvender til at skabe et overblik før man beskriver monotoniforholdene, er en såkaldt *fortegnslinje*. For funktionen i eksempel 4.6 ser fortegnslinjen således ud:

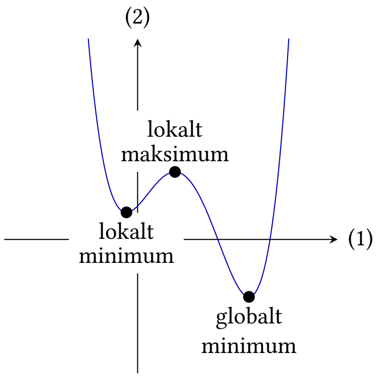
$$\begin{array}{rccccc} x: & & & 2 & & \longrightarrow \\ f'(x): & & - & 0 & + & \\ f(x): & & \searrow & \text{min.} & \nearrow & \end{array}$$

Af figuren kan man se at før $x = 2$ er $f'(x) < 0$, og efter $x = 2$ er $f'(x) > 0$. Dette er illustreret med hhv. $-$ og $+$ på figuren. I den nederste linje ser man at dette viser hvor $f(x)$ er aftagende, og hvor den er voksende (illustreret med hhv. $\searrow$ og $\nearrow$).

Vha. fortegnslinjen kan man skrive monotoniforholdene op.[4] Men man kan også aflæse noget mere. Ud for $x = 2$ har funktionen f nemlig et *minimum*, dvs. et sted hvor funktionsværdien er lavest mulig.

[4] Fortegnslinjen er altså ikke det samme som monotoniforholdene, men monotoniforholdene kan aflæses på fortegnslinjen.

Man kan se på figuren at der er tale om et minimum idet funktionen først aftager og derefter vokser. I dette tilfælde er der faktisk tale om et *globalt* minimum fordi det er det laveste punkt på hele grafen. Hvis et minimum ikke er globalt, taler man om et *lokalt* minimum. På samme måde taler man i øvrigt også om globale og lokale maksima. En illustration kan ses på figur 4.3.



Figur 4.3: Funktioner kan have både globale og lokale ekstrema.

En samlet betegnelse for disse punkter på grafen er *ekstrema*. Et *ekstremum* er altså et sted på grafen, hvor der er maksimum eller minimum (lokalt eller globalt).

Eksempel 4.7 I dette eksempel bestemmes monotoniforhold og ekstrema for funktionen $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Den afledte funktion er

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9\ ,$$

dvs. ligningen $f'(x) = 0$ bliver andengradsligningen

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

som har løsningerne $x = 1$ og $x = 3$.

Disse to løsninger deler tallinjen ind i tre intervaller: Tallene mindre end 1, tallene mellem 1 og 3 og tallene større end 3. Nu vælger man et tal fra hvert af disse intervaller for at finde fortegnene for $f'(x)$ i intervallerne:

$$\begin{aligned} x < 1: &\quad f'(0) = 3\cdot 0^2 - 12\cdot 0 + 9 = 9 > 0 \\ 1 < x < 3: &\quad f'(2) = 3\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 9 = -3 < 0 \\ x > 3: &\quad f'(5) = 3\cdot 5^2 - 12\cdot 5 + 9 = 24 > 0 \end{aligned}$$

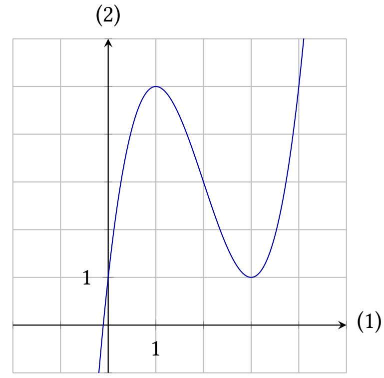
Herudfra kan man så tegne en fortegnslinje

x :		1		3	
$f'(x)$:	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$:	$\nearrow$	maks.	$\searrow$	min.	$\nearrow$

Ud fra fortegnslinjen kan man aflæse monotoniforholdene:

> $f(x)$ er voksende for $x \leq 1$ og for $x \geq 3$ og aftagende for $1 \leq x \leq 3$.

Idet man ved at monotoniintervallerne skiller ved $x = 1$ og $x = 3$, kan man også aflæse monotoniforholdene fra grafen (se figur 4.4) i stedet for at tegne fortegnslinjen.



Figur 4.4: Grafen for $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ har et lokalt maksimum og et lokalt minimum.

Ud fra fortegnslinjen kan man også se, at der er to lokale ekstrema. Det ene ekstremum er et lokalt maksimum ud for $x = 1$, det andet er et lokalt minimum ud for $x = 3$.

Andenkoordinaterne til de to ekstrema findes:

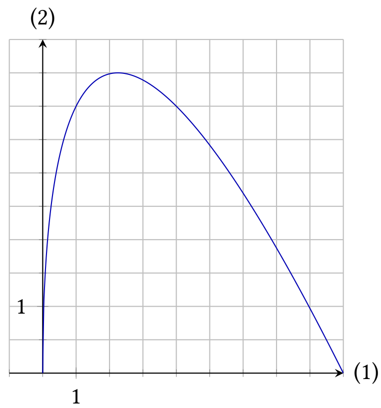
$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = 5 f(3) \quad = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = 1 \ .$$

Funktionen f har altså et lokalt maksimum i $(1, 5)$ og et lokalt minimum i $(3, 1)$.

Eksempel 4.8 I dette eksempel bestemmes evt. ekstrema for funktionen

$$f(x) = 6 \cdot \sqrt{x} - 2x \ , \quad x > 0 \ .$$

Grafen for denne funktion kan ses på figur 4.5. Her ser man at det ser ud som om funktionen har et globalt maksimum i nærheden af $x = 2$.



Figur 4.5: Grafen for $f(x) = 6 \cdot \sqrt{x} - 2x$ ser ud til at have et globalt maksimum.

For at bestemme om funktionen har et globalt maksimum, finder man først

$$f'(x) = 6 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - 2 \cdot 1 = \frac{3}{\sqrt{x}} - 2 \ .$$

Ligningen $f'(x) = 0$ bliver derfor

$$\frac{3}{\sqrt{x}} - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \ .$$

Der er altså et muligt ekstremum ud for $x = \frac{9}{4}$.

For at kunne lave en fortegnslinje ser man på $f'(x)$ for $x < \frac{9}{4}$ og for $x > \frac{9}{4}$.[5]

$$\begin{aligned} 0 < x < \tfrac{9}{4} \ : & \quad f'(1) = \frac{3}{\sqrt{1}} - 2 = 1 > 0 \\ x > \tfrac{9}{4} \ : & \quad f'(9) = \frac{3}{\sqrt{9}} - 2 = -1 < 0 \end{aligned}$$

Fortegnslinjen ser derfor således ud

[5] Det er også vigtigt at huske at funktionen kun er defineret for $x > 0$, så man må ikke sætte x lig 0 eller et negativt tal.

$$
\begin{array}{rccccc}
x: & & 0 & & \frac{9}{4} & \\
f'(x): & & & + & 0 & - \\
f(x): & & & \nearrow & \text{maks.} & \searrow
\end{array}
$$

Det skraverede areal viser at funktionen ikke er defineret for $x \leq 0$.

Vha. fortegnslinjen kan man se at grafen vokser frem til $x = \frac{9}{4}$ hvorefter den aftager. Funktionen har altså et globalt maksimum ud for $x = \frac{9}{4}$. Andenkoordinaten til dette punkt er

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = 6 \cdot \sqrt{\frac{9}{4}} - 2 \cdot \frac{9}{4} = 6 \cdot \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \ .$$

Funktionen har altså et globalt maksimum i $\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{2}\right)$.

4.2 Vendetangenter

Hvis man ser på eksemplerne ovenfor, ser det ud til at hver gang en graf har en vandret tangent skifter den fra at vokse til at aftage, eller omvendt. Det er imidlertid ikke altid tilfældet hvilket næste eksempel viser.

Eksempel 4.9 Her undersøges funktionen

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 62$$

for at finde frem til monotoniforholdene.

Først findes $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \cdot 2x + 48 \cdot 1 = 3x^2 - 24x + 48 \ ,$$

og derefter løses $f'(x) = 0$ som er andengradsligningen

$$3x^2 - 24x + 48 = 0 \ .$$

Det viser sig at denne andengradsligning kun har én løsning, nemlig

$$x = 4 \ .$$

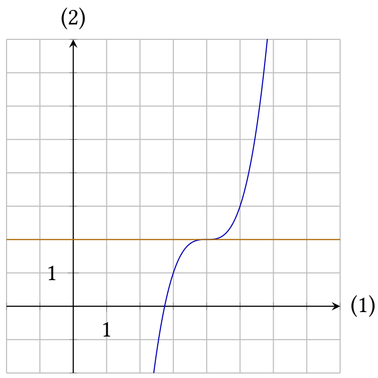
Herefter bestemmes fortegnet for $f'(x)$ for $x < 4$ hhv. $x > 4$,

$$
\begin{aligned}
x < 4 : &\quad f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 + 48 = 48 > 0 \\
x > 4 : &\quad f'(5) = 3 \cdot 5^2 - 24 \cdot 5 + 48 = 3 > 0 \ .
\end{aligned}
$$

Fortegnslinjen ser altså således ud:

$$
\begin{array}{rccc}
x: & & 4 & \\
f'(x): & + & 0 & + \\
f(x): & \nearrow & ? & \nearrow
\end{array}
$$

$f'(4) = 0$ så der er en vandret tangent ud for $x = 4$, men der er hverken tale om maksimum eller minimum idet funktionen vokser både før og efter $x = 4$. Situationen kan ses på figur 4.6.



Figur 4.6: I punktet $(4; f(4))$ har grafen for $f(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 62$ en vendetangent.

I dette tilfælde taler man om en *vandret vendetangent*. Fortegnslinjen ser altså således ud

x :		4	
$f'(x)$:	$+$	0	$+$
$f(x)$:	$\nearrow$	vend.	$\nearrow$

og funktionen f er voksende for alle x.

Betegnelsen *vendetangent* kan godt virke lidt underlig. Ser man på grafen på figur 4.6, er det tydeligt at grafen netop fortsætter og altså ikke vender. Men hvis det ikke er grafen der vender, hvad er det så?

Ser man nærmere på grafen vil man se at grafen ikke krummer på samme måde før og efter det punkt, hvor der er vandret vendetangent. På den konkrete graf er krumningen sådan at grafen ligner før vendetangenten, og efter vendetangenten.

4.3 Opsummering af metode

Dette afsnit afsluttes med en generel opskrift på hvordan man bestemmer monotoniforhold og ekstrema for en given funktion $f(x)$:

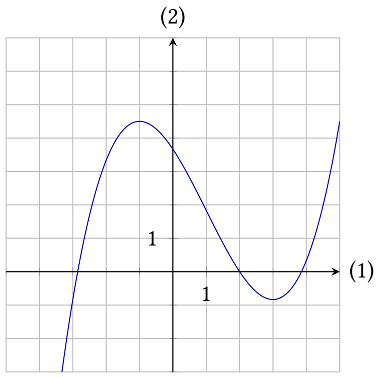
1. Bestem $f'(x)$.
2. Løs ligningen $f'(x) = 0$. Løsningerne er de steder hvor der er mulige ekstrema.[6]
3. Løsningerne til ligningen $f'(x) = 0$ deler førsteaksen i en række intervaller. Bestem fortegnet for $f'(x)$ i hvert af disse ved at indsætte et tal fra hvert interval i forskriften for $f'(x)$.

   Man kan også vælge at tegne grafen for at undersøge hvordan funktionen opfører sig i monotoniintervallerne. I så fald bliver denne udregning og fortegnslinjen overflødig.
4. Tegn en fortegnslinje.
5. Konkludér vha. fortegnslinjen. Hvis man skal bestemme et maksimum eller et minimum, skal man huske også at beregne andenkoordinaten til punktet.

[6] Husk at der også kan være vendetangenter.

4.4 Øvelser

Øvelse 4.1
Figuren herunder viser grafen for funktionen $f(x)$.



Aflæs funktionens monotoniforhold.

Øvelse 4.2
Bestem monotoniforholdene for de følgende funktioner

a) $f_1(x) = \ln(x) - x + 3\,, \quad x > 0$
b) $f_2(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$
c) $f_3(x) = 5x - e^x\,, \quad -4 \leq x \leq 8$
d) $f_4(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 3$
e) $f_5(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 3$
f) $f_6(x) = x + \dfrac{16}{x}$
g) $f_7(x) = 4\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\,, \quad x \geq 0$
h) $f_8(x) = -x^3 + 3x^2 + 4$

Øvelse 4.3
Bestem de lokale ekstrema for funktionerne i øvelse 4.2.

Øvelse 4.4
Tegn grafen for funktionen $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 3$ og bestem, hvad tallet a kan være når ligningen $f(x) = a$ har præcis 3 løsninger.

Øvelse 4.5
Bestem monotoniforhold og ekstrema for de følgende funktioner. Husk i hvert tilfælde at lægge mærke til om funktionen er defineret for alle x.

a) $f_1(x) = 3x^2 - 6x + 7$.
b) $f_2(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}x^2$.
c) $f_3(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$
d) $f_4(x) = \dfrac{1}{2x - 4}$.
e) $f_5(x) = 6\sqrt{x} - 2x$.
f) $f_6(x) = x^3 - 12x\,, \quad x \in [-1; 10]$.

Øvelse 4.6
Funktionen f er givet ved

$$f(x) = -2x^3 - 4x\,.$$

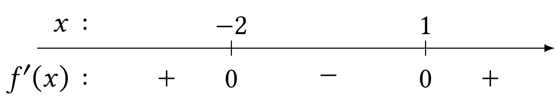
Argumenter vha. den afledte funktion for at f er en aftagende funktion.

Øvelse 4.7
Funktionen g er givet ved

$$g(x) = x^2\,.$$

Argumenter vha. den afledte funktion for at g ikke er en monoton funktion.

Øvelse 4.8
På figuren ses monotonilinjen for funktionen f.



Tegn en mulig graf for funktionen.

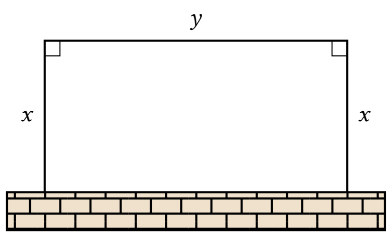
Optimering 5

I sidste kapitel blev det gennemgået hvordan man kan finde ekstrema for en funktion. Dette kan bruges til *optimering* af en størrelse. Optimering går ud på at finde ud af hvornår en given størrelse er så stor eller lille som muligt.

Hvis man har den størrelse man skal optimere, givet som en funktion af én variabel, så består optimering blot i at bestemme maksimum eller minimum; men virkeligheden er ikke altid så simpel. Skal man f.eks. bestemme hvornår et givent areal er størst, kan det sagtens forekomme at arealet afhænger af både en længde og en bredde. Der bliver så nødt til at være nogle andre betingelser der afgør hvordan længden og bredden afhænger af hinanden.

Hvordan optimering rent konkret kan foregå illustreres måske bedst med nogle eksempler.

Eksempel 5.1 I en have skal der bygges en hønsegård langs med en mur (se figur 5.1). Der skal således indhegnes 3 sider af et rektangel. Hvis der er 20 m hegn til rådighed, hvordan skal indhegningen så bygges så den dækker det største areal?



Figur 5.1: En hønsegård bygges langs med en mur.

Længden og bredden af det rektangel der udgør hønsegården, kan man kalde x og y (se figuren). Den samlede længde af hegnet må så svare til længden af de tre sider, dvs. $2x + y$. Da hegnet er 20 m langt, må der gælde at

$$2x + y = 20 \ ,$$

og isolerer man y i denne ligning, får man

$$y = 20 - 2x \ .$$

Arealet af rektanglet er $A = x \cdot y$, og det er denne størrelse der skal være størst mulig. Størrelsen afhænger af to variable, x og y, så man kan ikke umiddelbart bestemme dens største værdi. Men da man lige har fundet ud af at $y = 20 - 2x$, kan arealet også skrives som

$$A = x \cdot y = x \cdot (20 - 2x) = 20x - 2x^2 \ ,$$

og så afhænger arealet kun af x.[1]

Hvornår er dette areal så størst? For at finde de mulige ekstrema for funktionen går man frem fuldstændig som i foregående kapitel, dvs. man løser ligningen $A' = 0$.

[1]Bemærk i øvrigt, at $0 < x < 10$. At $x > 0$ følger af at x er en længde, betingelsen $x < 10$ følger af at der kun er 20 m hegn. De to sider af længde x kan derfor tilsammen ikke være 20 eller mere. Det betyder også at evt. løsninger for x som ikke ligger i intervallet mellem 0 og 10, skal kasseres.

Idet $A = 20x - 2x^2$, bliver

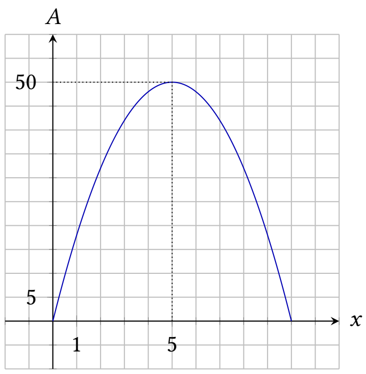
$$A' = 20 \cdot 1 - 2 \cdot 2x = 20 - 4x \ ,$$

dvs. ligningen $A' = 0$ er ligningen

$$20 - 4x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 5 \ .$$

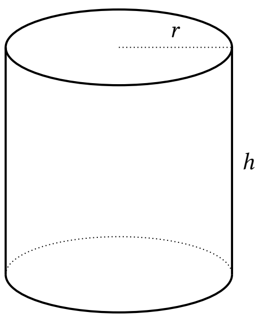
Der er altså muligvis et maksimum for arealet hvor $x = 5$. For at være sikker på at der nu også er tale om et maksimum, kan man tegne grafen for A, den ses på figur 5.2.

På grafen ser man at det drejer sig om et maksimum. Altså er arealet størst, når $x = 5$. Det giver så at $y = 10$, og at arealet er $A = 50$, hvilket man også kan se på figuren.



Figur 5.2: Arealet er størst, hvor $x = 5$.

Eksempel 5.2 En cylinderformet beholder der skal rumme 1 liter, skal laves så materialeforbruget er mindst muligt. Vi kan her gå ud fra at materialetykkelsen er ens overalt således at materialeforbruget er mindst når overfladearealet er mindst.



Figur 5.3: En cylinder er defineret ud fra dens højde og radius.

En cylinder kan defineres ud fra to parametre: Dens radius r (i toppen og bunden) og dens højde h (se figur 5.3). Idet beholderens rumfang er målt i liter, og 1 l = 1 dm^3, vil r og h blive målt i dm.

Rumfanget af en cylinder er givet ved

$$V = \pi r^2 h \ ,$$

og da rumfanget skal være på 1 liter, har man

$$\pi r^2 h = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad h = \frac{1}{\pi r^2} \ . \tag{5.1}$$

Overfladearealet af en cylinder er

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \ .$$

Indsætter man udtrykket for h fra (5.1), får man

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2}{r} \ .$$

Arealet er nu givet som en funktion af r. Der hvor arealet er mindst muligt, er $A' = 0$. Idet

$$A' = 4\pi r - \frac{2}{r^2} \ ,$$

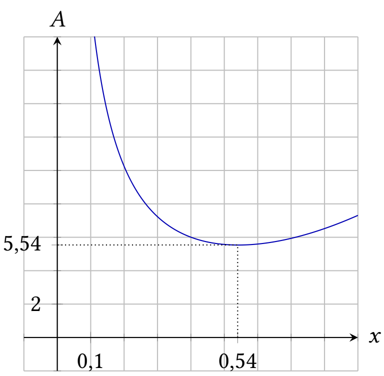
har man derfor ligningen

$$4\pi r - \frac{2}{r^2} = 0$$

som har løsningen

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0{,}54 \text{ dm} \ .$$

At det drejer sig om et minimum kan ses på figur 5.4.



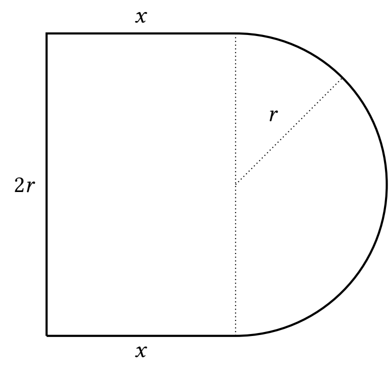
Figur 5.4: Overfladearealet er mindst når radius er 0,54 dm.

Når man kender radius, $r = 0{,}54$ dm, kan man beregne højden idet man fra (5.1) har at

$$h = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}54^2} = 1{,}08 \text{ dm} .$$

En cylinderformet beholder der skal rumme 1 liter, har derfor det mindste overfladeareal når radius er $r = 0{,}54$ dm, og højden er $h = 1{,}08$ dm.

Eksempel 5.3 I en have skal der anlægges et blomsterbed på 10 m^2. Blomsterbedet skal have form som et rektangel sat sammen med en halvcirkel (se figur 5.5).



Figur 5.5: Et blomsterbed på 10 m^2 sammensættes af et rektangel og en halvcirkel.

Da der skal lægges sten rundt langs kanten af bedet, er man interesseret i at gøre omkredsen så lille som muligt. Hvilken størrelse skal de to længder x og r på figuren så have?

Blomsterbedet består af et rektangel med sidelængder x og $2r$ samt en halvcirkel med radius r. Dets areal er derfor

$$A = 2r \cdot x + \frac{\pi r^2}{2} .$$

Da arealet skal være 10 m^2, kan man sætte dette lig med 10. Herefter isoleres x.

$$2rx + \frac{\pi r^2}{2} = 10 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{5}{r} - \frac{\pi r}{4} . \tag{5.2}$$

Det er omkredsen der skal være mindst mulig. Derfor opstiller man nu et udtryk for omkredsen. Idet figuren består af 3 rette linjer og en halvcirkel, bliver omkredsen

$$O = 2r + 2x + \pi r .$$

I dette udtryk indsættes udtrykket for x fra (5.2), og man får

$$O = 2r + 2 \cdot \left(\frac{5}{r} - \frac{\pi r}{4}\right) + \pi r = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) r + \frac{10}{r} .$$

For at finde minimum for dette udtryk differentierer man først og finder

$$O' = 2 + \frac{\pi}{2} - \frac{10}{r^2} .$$

Dette sættes lig 0, og man får ligningen

$$2 + \frac{\pi}{2} - \frac{10}{r^2} = 0$$

som har løsningen

$$r = \frac{10}{\sqrt{20 + 5\pi}} \approx 1{,}67 \text{ m} .$$

For at finde ud af om dette nu også *er* et minimum fremstilles en fortegnslinje ved at se på fortegnet for O' for værdier af r mindre end hhv. større end 1,67.

$$\begin{aligned} 0 < r < 1{,}67 : &\quad O'(1) = 2 + \frac{\pi}{2} - \frac{10}{1^2} = -6{,}43 < 0 \\ r > 1{,}67 : &\quad O'(2) = 2 + \frac{\pi}{2} - \frac{10}{2^2} = 1{,}07 > 0 . \end{aligned}$$

Fortegnslinjen ser derfor således ud:

x :		0		1,67	
$f'(x)$:			$-$	0	$+$
$f(x)$:			$\searrow$	min.	$\nearrow$

og der er et minimum når radius i cirklen er $r = 1{,}67$ m.

Længden x bliver så (resultatet fra (5.2) anvendes)

$$x = \frac{5}{1{,}67} - \frac{\pi \cdot 1{,}67}{4} = 1{,}67 \text{ m} .$$

5.1 Opsummering af metode

Den metode der er anvendt i ovenstående eksempler, kan beskrives på følgende måde.

1. Opstil en ligning ud fra en betingelse der er givet i opgaven (f.eks. fast omkreds, fast areal, fast rumfang). Isolér herefter én af de variable i den opstillede ligning.
2. Opstil et udtryk for den størrelse der skal optimeres, og erstat en af de variable i udtrykket med det udtryk man fandt frem til under punkt. 1. Man står nu med en funktion af én variabel.
3. Bestem ekstrema for den funktion man fandt frem til under punkt 2. Bestem evt. de resterende mål.

Man kan i princippet komme ud for at der er flere end to variable i det udtryk, der skal optimeres. Her bliver man så nødt til at have mere end én betingelse for at kunne opskrive udtrykket som en funktion af én variabel. Det svarer til, at man skal udføre punkt 1–2 nogle gange.

5.2 Øvelser

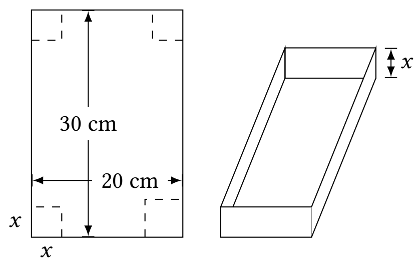
Øvelse 5.1
Hvis $x + y = 64$, hvad er så den størst mulige værdi af $x \cdot y$?

Øvelse 5.2
Et rektangulært område skal indhegnes med 400 m hegn. Området skal være så stort som muligt. Bestem rektanglets længde og bredde.

Øvelse 5.3
Der skal bygges en kasse med kvadratisk bund og uden låg med et rumfang på 1200 cm^3.

Bestem kassens dimensioner hvis der skal anvendes mindst muligt materiale.

Øvelse 5.4
En kasse foldes af et stykke pap hvor der er skåret et kvadratisk stykke af hvert hjørne (se figur).



Bestem værdien af x så kassen får det størst mulige rumfang.

Øvelse 5.5
Om to tal x og y gælder at $x + y = 10$.

a) Hvad skal x og y være for at $x^2 + y^2$ er størst mulig?

b) Hvad skal x og y være for at $x^2 + y^2$ er mindst mulig?

Øvelse 5.6
Der skal bygges en kasse hvor bundens sider er i forholdet 1:3. Materialet til top og bund koster 60 kr./m^2, og materialet til siderne koster 80 kr./m^2.

Bestem kassens dimensioner hvis den skal koste 500 kr. og have det størst mulige rumfang.

Øvelse 5.7
En coladåse er udformet som en cylinder. Dåsen indeholder 330 ml cola (1 ml = 1 cm^3).

a) Hvilke dimensioner ville dåsen have hvis man blot skulle minimere overfladearealet?

I virkeligheden er en coladåse ikke en perfekt cylinder. Der går noget ekstra til at lave åbningen i toppen, og bunden er normalt ikke flad, men buet. Dette kan simuleres ved at man antager at top og bund har en anden tykkelse end siden på dåsen. (En virkelig coladåse er i øvrigt ca. 11,5 cm høj og har en diameter på ca. 6,4 cm.)

b) Hvilke dimensioner får man hvis top og bund er dobbelt så tykke som siden, og der skal bruges mindst muligt materiale til fremstillingen?

c) Overvej nogle andre hensyn der kunne tages i betragtning når man skal udforme en coladåse.

Øvelse 5.8
En rektangulær lagerhal skal bygges med et grundareal på 5000 m^2. Lagerhallen skal deles i to rektangulære rum vha. en indre væg.

Det koster 6000 kr. per meter at bygge de ydre vægge, og 3500 kr. per meter at bygge den indre væg.

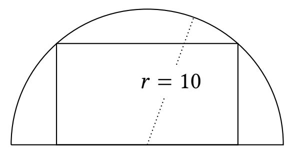
Find lagerhallens dimensioner hvis omkostningerne ved byggeriet skal være så lave som mulige.

Øvelse 5.9
En snor på 50 cm skæres over i to stykker. Det ene stykke formes som en cirkel og det andet som et kvadrat.

a) Hvor skal snoren skæres hvis de to figurer skal have det størst mulige samlede areal?

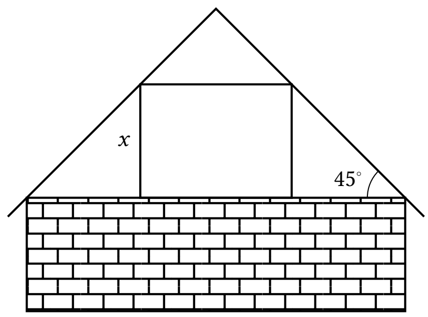
b) Hvor skal snoren skæres hvis de to figurer skal have det mindst mulige areal?

Øvelse 5.10
Et rektangel er indskrevet i en halvcirkel med radius 10 (se figur).



Bestem dimensionerne af rektanglet hvis det skal have så stort et areal som muligt.

Øvelse 5.11
Et parcelhus er 10 m bredt og har en taghældning på 45° (se figur). På første sal skal der laves et rektangulært glasparti.



a) Hvor stor bliver højden x hvis glaspartiet skal have det størst mulige areal?

b) Hvad er x hvis taghældningen i stedet er 50°?

Øvelse 5.12
En virksomhed får opstillet en model for deres produktion af x enheder af et bestemt produkt. I modellen betegner $O(x)$ de samlede omkostninger (i kr.) ved produktionen, og $p(x)$ betegner den pris (kr./stk.) produktet skal have for at samtlige enheder bliver solgt.

Det viser sig at

$$O(x) = 0{,}0025 \cdot x^2 + 10^6 \ ,$$

og

$$p(x) = -0{,}007x + 1400$$

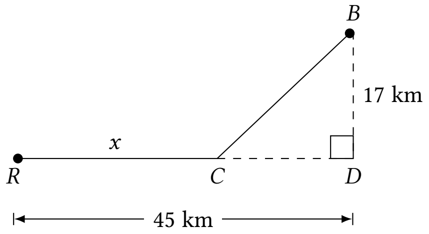
hvor x er antal solgte enheder.

a) Udled et udtryk for den samlede omsætning $A(x)$.

b) Udled et udtryk for det samlede overskud $F(x)$, dvs. omsætningen fratrukket udgifterne.

c) Hvor mange enheder skal der produceres for at overskuddet bliver størst muligt?

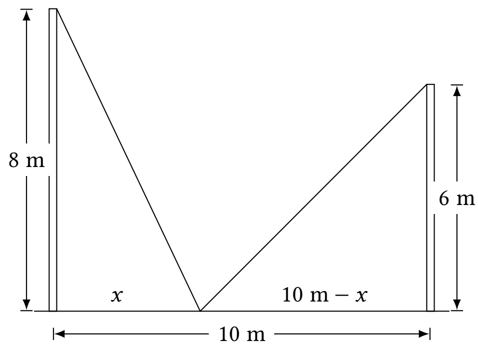
Øvelse 5.13
En boreplatform (B) ligger 17 km fra kysten. Fra boreplatformen skal der føres en rørledning til et raffinaderi (R) der ligger 45 km henne ad kysten (se figur).



Man ønsker at vide hvor på kysten (i punkt C) man skal føre rørledningen i land hvis det er dyrere pr. km at bygge en undersøisk rørledning end det er at bygge den på land.

a) Hvis det er dobbelt så dyrt at bygge en undersøisk rørledning som at bygge den på land, hvilken værdi har x så?

Øvelse 5.14
To pæle står 10 m fra hinanden. Pælene er stabiliseret med en wire der er fastgjort til et punkt mellem de to pæle. Nogle af målene kan ses på figuren herunder.



Bestem den værdi af x der minimerer længden af wiren.

6 Væksthastighed

Vha. differentialregning kan man som tidligere vist finde frem til hvornår bestemte matematiske størrelser antager deres maksimum og minimum. Dette kan f.eks. bruges til optimering. Men differentialregning kan også bruges til at få indblik i hvor hurtigt bestemte størrelser vokser til bestemte tidspunkter.

Der gælder nemlig følgende definition.[1]

[1] Bemærk at i definitionen kaldes den uafhængige variabel t i stedet for x. I princippet kunne den sagtens have heddet x, betegnelsen t bruges kun for at understrege at der er tale om *tid*.

Definition 6.1

Hvis $f(t)$ er en differentiabel funktion hvor t betegner tiden, så kalder man $f'(t)$ for *væksthastigheden* til tiden t.

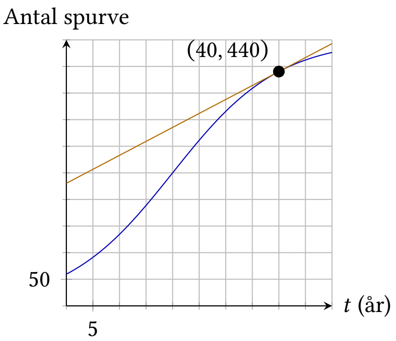
Eksempel 6.2 På figur 6.1 ses grafen for $f(t)$ som viser hvordan antallet af spurve på en bestemt ø vokser med tiden (målt i år).

På figuren kan man aflæse at grafen går gennem punktet $(4, 440)$. Samtidigt er der tegnet en tangent gennem dette punkt. Tangentens hældning er 5,25. Med andre ord er

$$f(40) = 440 \qquad \text{og} \qquad f'(40) = 5{,}25\ .$$

Dette er en rent matematisk beskrivelse som kan oversættes til følgende:

1. Efter 40 år er der 440 spurve på øen.
2. Efter 40 år vokser antallet af spurve på øen med en hastighed på 5,25 spurve om året.



Figur 6.1: Populationen af spurve på en bestemt ø til tiden t (i år).

Eksempel 6.3 En kande med lunkent vand sættes i et køleskab. Vandets temperatur er herefter givet ved funktionen

$$f(t) = 5 + 15 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$$

hvor tiden t måles i minutter.

Herudfra kan man f.eks. bestemme væksthastigheden $f'(45)$. Først bestemmes

$$f'(t) = 0 + 15 \cdot (-0{,}01) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01 \cdot t} = -0{,}15 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01 \cdot t}\ ,$$

og derefter

$$f'(45) = -0{,}15 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01 \cdot 45} = -0{,}096\ .$$

Hvad viser dette tal?

For det første ser man at tallet er negativt, dvs. at temperaturen *falder*. Tallets størrelse viser hvor meget. At $f'(45) = -0{,}096$ kan derfor fortolkes på denne måde:

Efter 45 minutter i køleskabet falder vandets temperatur med en hastighed på $0{,}096^{\circ}$C pr. minut.

6.1 Øvelser

Øvelse 6.1
En nytårsraket affyres lodret opad. Rakettens højde h (i meter) som funktion af tiden t (i sekunder) kan beskrives ved modellen

$$h(t) = -4{,}9 \cdot t^2 + 45t \ , \quad 0 \leq t \leq 4.5 \ .$$

a) Hvad er rakettens hastighed efter 1 s?

b) Hvad er rakettens hastighed efter 2 s?

c) Hvad er rakettens hastighed når den er 75 m oppe?

Øvelse 6.2
En patient gives en indsprøjtning af en bestemt type medicin. Til tiden t (i timer efter indsprøjtning) kan koncentrationen c (i ng/L) af medicinen i blodet beskrives ved modellen

$$c(t) = 120 \cdot 0.87^t \ .$$

a) Bestem tallet $c'(2)$, og giv en fortolkning af dette tal.

b) Til hvilket tidspunkt aftager medicinkoncentrationen med en hastighed på 3 ng/L per sekund?

Flere afledte funktioner A

I dette afsnit udledes hvordan de afledte funktioner til $\ln(x)$, e^x, a^x og x^n ser ud. Den første af disse udledninger gør brug af tre-trins-reglen, resten udledes ved brug af regnereglerne i afsnit 2.4 og 2.5.

Hermed er der ført bevis for de sidste af påstandene i tabel 2.6.

Sætning A.1

Hvis $f(x) = \ln(x)$, er den afledte funktion $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Bevis

Her bruges tre-trins-reglen. Først finder man[1]

$$\Delta f = \ln(x + \Delta x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) .$$

[1] I udregningen bruges regnereglen

$$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) .$$

Hernæst ser man på

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) . \tag{A.1}$$

Dette kan ikke umiddelbart reduceres yderligere.

Nu skal man lade $\Delta x \to 0$, men udtrykket i (A.1) er umiddelbart for kompliceret. Man bruger derfor et lille trick: Man indfører en ny variabel t som man sætter lig med $\frac{\Delta x}{x}$. At lade $\Delta x \to 0$ svarer så til at lade $t \to 0$.

(A.1) kan nu omskrives til

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{xt} \cdot \ln(1 + t)$$

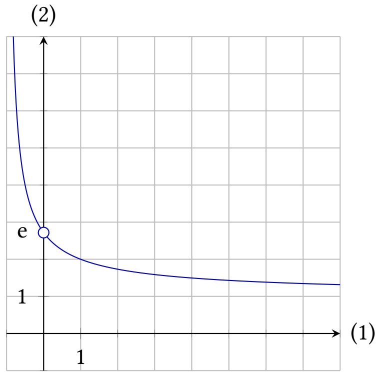
som igen må svare til

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{t} \cdot \ln(1 + t) = \frac{1}{x} \cdot \ln\left((1 + t)^{\frac{1}{t}}\right) . \tag{A.2}$$

Det er et velkendt resultat i matematikken at[1]

$$\lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e . \tag{A.3}$$

Faktisk bruges dette nogle steder som definition på tallet e. Resultatet i (A.3) vil ikke blive bevist her, men et godt indicium for påstanden ses på figur A.1 der viser grafen for funktionen $(1 + t)^{\frac{1}{t}}$.



Figur A.1: Grafen for $(1 + t)^{\frac{1}{t}}$.

Lader man nu $\Delta x \to 0$, er det altså det samme som at lade $t \to 0$ i (A.2), og vha. resultatet fra (A.3) får man at det giver

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(\mathrm{e}) = \frac{1}{x} \, . \qquad \blacksquare$$

Sætning A.2

Når $f(x) = \mathrm{e}^x$, er den afledte funktion $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

Bevis
Da e^x er den inverse funktion af $\ln(x)$ gælder følgende ligning:

$$\ln(\mathrm{e}^x) = x \, . \tag{A.4}$$

Differentierer man på begge sider af lighedstegnet, så gælder ligningen stadig.

På venstre side skal man differentiere en sammensat funktion, og man får derfor[2]

$$(\ln(\mathrm{e}^x))' = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \cdot (\mathrm{e}^x)' = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \cdot f'(x) \, .$$

[2]Det er her vigtigt at huske at man ikke kender den afledte funktion af e^x endnu. Denne kan derfor ikke skrives som andet end $(\mathrm{e}^x)'$ hvilket er det samme som $f'(x)$.

På den højre side får man

$$(x)' = 1 \, .$$

Da venstre side er lig højre side, gælder der derfor

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x} \cdot f'(x) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad f'(x) = \mathrm{e}^x \, . \qquad \blacksquare$$

Sætning A.3

Hvis $f(x) = a^x$ hvor $a > 0$, så er $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$.

Bevis
Funktionen f kan omskrives til

$$f(x) = a^x = \left(\mathrm{e}^{\ln(a)}\right)^x = \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x} \, .$$

Denne funktion er en sammensat funktion, og dens afledte funktion er

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x} \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x \, . \qquad \blacksquare$$

Sætning A.4

Hvis

$$f(x) = x^n \, , \quad x > 0 \, ,$$

er den afledte funktion $f'(x) = nx^{n-1}$.

Bevis
Først foretages følgende omskrivning af $f(x)$:

$$f(x) = x^n = \mathrm{e}^{\ln(x^n)} = \mathrm{e}^{n \cdot \ln(x)} \ .$$

f kan altså skrives som en sammensat funktion hvor den ydre funktion er

$$p(q) = \mathrm{e}^q \ ,$$

og den indre er

$$q(x) = n \cdot \ln(x)$$

hvor n er en konstant.

Differentierer man den ydre funktion, finder man

$$p'(q) = \mathrm{e}^q \ .$$

Den indre funktion giver

$$q'(x) = n \cdot \frac{1}{x} \ .$$

Altså er

$$\begin{aligned} f'(x) = p'(q) \cdot q'(x) &= \mathrm{e}^q \cdot n \cdot \frac{1}{x} \\ &= \mathrm{e}^{n \cdot \ln(x)} \cdot n \cdot \frac{1}{x} = x^n \cdot n \cdot \frac{1}{x} \\ &= n \cdot x^{n-1} \ . \end{aligned}$$

■

Bibliografi

[1] Demetrios Kanoussis. *Euler's Number e*. 9. maj 2015. URL: http://www.goldenratiopublications.com/eulers-number-e/ (hentet 03.08.2015).