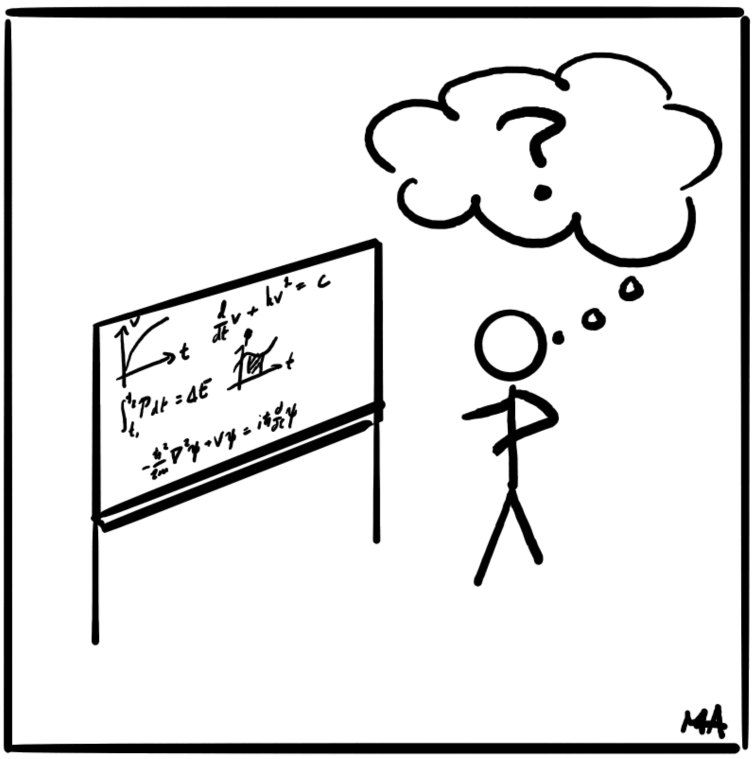
Mike Vandal Auerbach

SUPPLERENDE FYSIK A

Version 1.2

14. januar 2019



www.mathematicus.dk

Supplerende fysik A
Version 1.2, 2019

Disse noter er blevet til, fordi luftmodstand er kernestof i fysik på A-niveau, men ikke er omtalt i den lærebog, jeg pt. anvender, ligesom Coulombs gnidningslov kun omtales i en enkelt opgave.

Derudover var der nogle emner, som jeg syntes fortjente en mere selvstændig behandling, og de er derfor blevet medtaget i noterne.

Disse noter er skrevet til fysikundervisning på stx og må frit anvendes til ikke-kommercielle formål.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet LaTeX, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf*/*TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.

Indhold

— 1 —

Gnidningskræfter

Én af de ting, man ofte udelader af simple fysiske modeller, er gnidningskræfter. Det kan være gnidning mod et underlag eller luftmodstand i et frit fald.

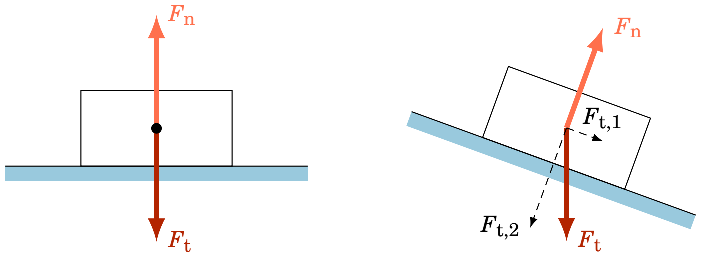
Disse kræfter kan sagtens beskrives; man udelader dem dog ofte, idet deres bidrag i mange situationer er meget små, og modellerne ellers bliver temmeligt komplicerede. Man kan dog ikke udelade gnidningskræfter fra modellerne i alle tilfælde, så her følger en beskrivelse af disse kræfter.

1-1 Coulombs gnidningslov

Ifølge Newtons første lov vil en genstand, der ikke er påvirket af en kraft, ligge stille eller bevæge sig ad en ret linje med konstant hastighed. Lader man nu f.eks. en genstand glide hen ad et bord, er det dog tydeligt, at genstanden ikke bevæger sig ligeud i det uendelige. At genstanden bremses skyldes gnidning mod underlaget.

Denne gnidningskraft afhænger af materialernes beskaffenhed, f.eks. er gnidningskraften stor mellem gummi og asfalt, mens den er lille mellem metal og is.

Gnidningskraften på en genstand er proportional med normalkraften. Normalkraften er en reaktionskraft, der står vinkelret på underlaget. En genstand, der bliver presset ned mod et underlag af tyngdekraften, vil ifølge Newtons tredje lov blive påvirket af en reaktionskraft, der peger den anden vej, se figur 1.1.



(a) Her er $F_n = F_g$.

(b) Her er $F_n = F_{t,2}$.

Figur 1.1: For en genstand, der ligger vandret, er normalkraften lige så stor som tyngdekraften.
For en genstand på et skråplan er normalkraften lige så stor som den komposant af tyngdekraften $F_{t,2}$, der står vinkelret på skråplanet.

Gnidningskraften, som en genstand udsættes for er proportional med normalkraften. Denne sammenhæng kaldes *Coulombs gnidningslov*:

Tabel 1.2: Nogle værdier for gnidningskoefficienten.

	μ
stål mod is	0,02
træ mod træ	0,2–0,7
glas mod glas	0,4
gummi mod beton	1

Coulombs gnidningslov

$$F_\mathrm{g} = \mu F_\mathrm{n}\,. \tag{1.1}$$

Proportionalitetskonstanten μ kaldes *gnidningskoefficienten*. En oversigt over forskellige gnidningskoefficienter kan ses i tabel 1.2.

Når man taler om gnidning er der i virkeligheden to tilfælde at tage hensyn til. I det *dynamiske* tilfælde har man, at hvis en genstand er i bevægelse, så er gnidningskraften givet ved

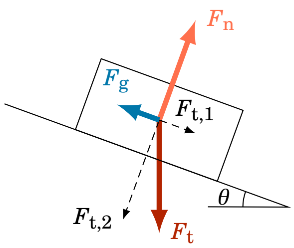
$$F_\mathrm{g} = \mu_\mathrm{d} F_\mathrm{n}\,,$$

hvor μ_d er den *dynamiske gnidningskoefficient*. Værdierne i tabel 1.2 er alle dynamiske gnidningskoefficienter.

Det *statiske* tilfælde er, hvor genstanden ligger stille. I den situation, skal genstanden påvirkes af en kraft med størrelsen

$$F \geq \mu_\mathrm{s} F_\mathrm{n}\,,$$

før den begynder at bevæge sig. μ_s kaldes den *statiske gnidningskoefficent*. Som regel er $\mu_\mathrm{s} > \mu_\mathrm{d}$, dvs. det kræver en mindre kraft at holde en genstand i bevægelse, end det kræver at sætte bevægelsen i gang.



Figur 1.3: En klods, der bevæger sig på et skråplan, er påvirket af tyngdekraften, normalkraften og gnidningskraften.

1-2 Bevægelse på et skråplan

Som eksempel kan man se på bevægelsen af en klods på et skråplan, der danner vinklen θ med vandret (se figur 1.3). Tyngdekraften kan deles op i to komposanter: $F_\mathrm{t,1}$, som er parallel med skråplanet, og $F_\mathrm{t,2}$, som er vinkelret på skråplanet. En geometrisk analyse af figuren giver, at

$$F_\mathrm{t,1} = F_\mathrm{t} \sin(\theta) \qquad \text{og} \qquad F_\mathrm{t,2} = F_\mathrm{t} \cos(\theta)\,.$$

Heraf følger fra Coulombs gnidningslov, at

$$F_\mathrm{g} = \mu F_\mathrm{n} = \mu F_\mathrm{t,2} = \mu F_\mathrm{t} \cos(\theta)\,.$$

Den resulterende kraft på klodsen er parallel med skråplanet, og dens størrelse er givet ved forskellen på tyngdekraftens komposant parallelt med skråplanet fratrukket gnidningskraften, altså

$$\begin{aligned} F_\mathrm{res} &= F_\mathrm{t,1} - F_\mathrm{g} \\ &= F_\mathrm{t} \sin(\theta) - \mu F_\mathrm{t} \cos(\theta)\,. \end{aligned}$$

Dvs.

$$F_\mathrm{res} = F_\mathrm{t} \left(\sin(\theta) - \mu \cos(\theta) \right)\,.$$

Hvis den resulterende kraft er positiv, så accelereres klodsen på vej ned ad skråplanet. Er kraften negativ, bliver klodsen derimod bremset. Dette bestemmes af faktoren

$$\sin(\theta) - \mu\cos(\theta)\,.$$

Denne faktor giver 0, når

$$\sin(\theta) = \mu\cos(\theta) \qquad \Leftrightarrow \qquad \tan(\theta) = \mu\,.$$

Altså får man, at hvis $\tan(\theta) > \mu$, er accelerationen positiv på vej ned ad skråplanet. Omvendt er accelerationen negativ på vej ned ad skråplanet, hvis $\tan(\theta) < \mu$.

1-3 Luftmodstand

En anden form for gnidning, en genstand kan påvirkes af, er luftmodstand. Det viser sig, at den luftmodstand, en genstand påvirkes af, er afhængig af dens hastighed.

På figur 1.4 ses en plade med arealet A, som bevæger sig med hastigheden v. I et lille tidsrum flytter pladen sig stykket Δs. Herved vil den flytte et rumfang af luft, der er givet ved

$$V_{\text{luft}} = A\,\Delta s\,,$$

hvilket svarer til at massen af den flyttede luft er

$$m_{\text{luft}} = \rho V = \rho A\,\Delta s\,.$$

Størrelsen af det arbejde, som pladen udfører på luftmængden er $F\,\Delta s$. Hvis luften, før den bliver flyttet, har hastigheden $v = 0$, vil den få tilført den kinetiske energi $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$. Denne tilførsel af kinetisk energi må svare til det arbejde, der er udført på luften, dvs.

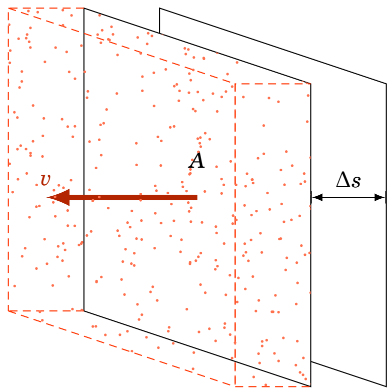
$$F\,\Delta s = \tfrac{1}{2}m_{\text{luft}}v^2 = \tfrac{1}{2}\rho A\,\Delta s\,v^2\,,$$

og altså er den resulterende kraft på luftmængden lig

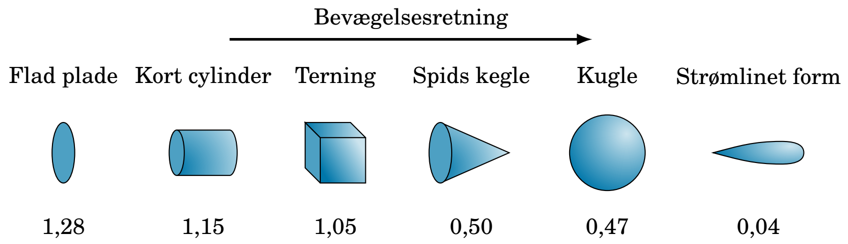
$$F = \tfrac{1}{2}\rho A v^2\,.$$

Ifølge Newtons 3. lov må luften påvirke pladen med en tilsvarende kraft. Altså må luftmodstanden være givet ved denne formel. Dog har kraften kun denne størrelse, hvis al luften bliver flyttet samme stykke Δs. I virkeligheden vil noget af luften dog bevæge sig ud langs siderne og skabe turbulens, hvilket betyder, at luftmodstanden i praksis ændrer sig med en faktor.

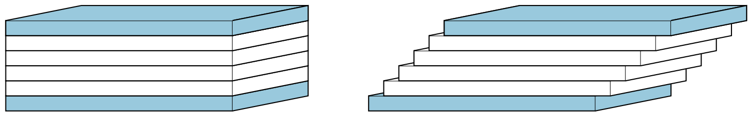
Med hvilken faktor, luftmodstanden ændrer sig, afhænger af objektets form. Hvis objektet er mere strømlinet, vil der f.eks. trække mere luft ud langs siderne. Luftmodstanden på et objekt kan derfor beskrives ved formlen



Figur 1.4: En plade med arealet A bevæger sig med en hastighed på v. I et lille tidsrum flytter pladen sig med stykket Δs.



Figur 1.5: Formfaktoren for forskellige former. Bevægelsesretningen er mod højre.



Figur 1.6: Når der er tale om laminar strømning opfører væsken sig, som om den består af en masse tynde lag, der glider langs med hinanden.

$$F_{\text{luft}} = \tfrac{1}{2} c_w \rho A v^2 \,, \tag{1.2}$$

hvor c_w er en dimensionsløs konstant, der kaldes *formfaktoren*.[1]

[1] Formfaktoren kaldes også nogle steder en *modstandskoefficient*. Indekset w kommer af det tyske *Widerstand*, »modstand«.

Formfaktoren for en bestemt form kan bestemmes eksperimentelt. Nogle værdier for forskellige former kan ses på figur 1.5.

Denne formel for luftmodstand kan også bruges til at beskrive gnidningsmodstanden i letflydende væsker, f.eks. vand.

Eftersom luftmodstanden er proportional med kvadratet på hastigheden, vil luftmodstanden på et faldende legeme øges, ind til tyngdekraften og luftmodstanden er lige store. Når de to kræfter bliver lige store har legemet nået sin terminalhastighed. Denne kan altså findes ved at løse ligningen $F_t = F_g$, dvs.

$$mg = \tfrac{1}{2} c_w \rho A v_{\text{term}}^2 \,.$$

Løser man ligningen, finder man, at terminalhastigheden er givet ved formlen

$$v_{\text{term}} = \sqrt{\frac{2mg}{c_w \rho A}} \,.$$

1-4 Stokes' lov

Hvis et legeme bevæger sig gennem en meget tyktflydende væske, f.eks. olie eller sirup, gælder ovenstående formel ikke. Her er gnidningsmodstanden i stedet proportional med hastigheden og afhængig af væskens *viskositet*. Populært sagt kan viskositet ses som et mål for, hvor tyktflydende væsken er.

Viskositeten af en væske har betydning, når væsken flyder tilstrækkelig langsomt til, at der er tale om *laminar strømning*.[2] Man taler om laminar strømning, når væsken opfører sig, som om den består af en række tynde lag, der flyder langs med hinanden. På figur 1.6 kan man se en model for dette. Væsken ligger mellem to plader og flytter sig i lag, når den bevæger sig. En stak ølbrikker, man skubber til, er en udmærket model for, hvordan laminar strømning foregår.

[2] »Laminar« er afledt af latin *lamina*, »tynd plade«. Tænk på laminering.

Man kan definere viskositeten ud fra to størrelser, *forskydningsspændingen* og *forskydningsraten*.

Man kan forestille sig væsken liggende mellem to plader som på figur 1.6. Hvis den øverste plade har arealet A og påvirkes af kraften F (se figur 1.7), definerer man forskydningsspændingen τ som den kraft, pladen påvirkes med pr. areal, dvs.

$$\tau = \frac{F}{A}\,.$$

Forskydningsraten $\dot{\gamma}$ viser, hvor hurtigt pladen bevæger sig i forhold til afstanden mellem de to plader. Altså er

$$\dot{\gamma} = \frac{v}{h}\,.$$

Det viser sig at de to størrelser τ og $\dot{\gamma}$ er proportionale, $\tau = \eta\dot{\gamma}$. Det giver også god mening, idet man må forvente at den øverste plade bevæger sig hurtigere, jo større en kraft, den påvirkes med. Proportionalitetskonstanten η er det, man kalder viskositeten,

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}\,. \tag{1.3}$$

Viskositeten beskriver altså forholdet mellem den kraft pr. areal, den øverste plade påvirkes med og den hastighed pr. lodret afstand, pladens hastighed øges med. Hvis det er sådan, at man skal påvirke pladen med en stor kraft for at øge hastigheden bare en lille smule, så er viskositeten høj, dvs. væsken er meget tyktflydende.

Enheden for viskositet kan findes ud fra formlen (1.3). Hvis man indsætter definitionerne på τ og $\dot{\gamma}$, får man $\eta = FA^{-1}v^{-1}h$, dvs. enheden for viskositet er

$$[\eta] = [F][A]^{-1}[v]^{-1}[h] = \mathrm{N\,m^{-2}\,s\,m^{-1}\,m} = \mathrm{N\,m^{-2}\,s} = \mathrm{Pa\,s}\,.$$

For et lille objekt, der bevæger sig langsomt af sted i en viskøs væske, viser det sig, at gnidningskraften er proportional med hastigheden. Hvis man ser på en lille kugle, der bevæger sig gennem en væske, kan man forestille sig, at gnidningskraften også kan afhænge af væskens densitet ρ, dens viskositet η og kuglens radius r. Man kan finde frem til at udtryk for gnidningskraften ved at foretage en dimensionsanalyse. Afhænger gnidningskraften af disse størrelser (og er proportional med hastigheden v) kan man opstille et formodet udtryk for gnidningskraften

$$F_g = k\rho^a\eta^b r^c v\,,$$

hvor eksponenterne a, b og c skal vælges, så enhederne passer sammen. Proportionalitetskonstanten k må bestemmes på anden vis.

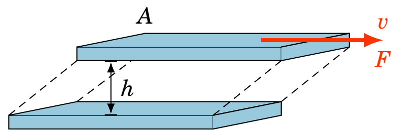
Heraf får man, at

$$\begin{aligned}[F_g] &= [\rho]^a[\eta]^b[r]^c[v] \\ &= (\mathrm{kg\,m^{-3}})^a(\mathrm{N\,m^{-2}\,s})^b\mathrm{m}^c\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \mathrm{N}^b\,\mathrm{kg}^a\,\mathrm{m}^{-3a-2b+c+1}\,\mathrm{s}^{b-1}\,.\end{aligned}$$

Da F_g måles i newton, kommer enhederne til at passe, hvis man sætter $a = 0$ og $b = c = 1$.[3] Dvs.

$$F_g = k\eta r v\,. \tag{1.4}$$

For kugleformede legemer kan man lave en mere præcis matematisk udledning, hvorved man får bestemt størrelsen af proportionalitetskonstanten k. Man får så



Figur 1.7: Den kraft pr. areal, den øverste plade påvirkes med, er forskydningsspændingen; mens forskydningsraten er den øverste plades hastighed i forhold til afstanden mellem øverste og nederste plade.

[3] Det er her værd at bemærke, at gnidningskraften altså ikke afhænger af væskens densitet, men kun af dens viskositet.

Stokes' lov

$$F_g = 6\pi\eta r v\ , \tag{1.5}$$

hvor η er viskositeten af væsken, r er kuglens radius, og v er hastigheden.

For andre typer af objekter under de samme betingelser, gælder formel (1.4) stadig, Her må konstanten k dog bestemmes eksperimentelt, mens »radius« r fortolkes som en karakteristisk længde for objektet, f.eks. en gennemsnitlig radius.

— 2 —

Differentialregning

Inden for differential- og integralregningen findes der to forskellige former for notation, som det er værd at kende. Den ene er den, der traditionelt anvendes inden for matematikundervisningen i gymnasiet. Den kaldes *Lagrange-notation* efter Joseph Louis Lagrange. Her anvendes et mærke til at symbolisere den afledte funktion, dvs.

$$f'(x)\,,\quad f''(x)\,,\quad f'''(x)\,.$$

Antallet af mærker angiver, hvor mange gange funktionen $f(x)$ er differentieret.

En anden notation, som man ofte anvender i fysik, stammer fra Gottfried Wilhelm Leibniz, og kaldes derfor *Leibniz-notation*. Her skriver man ikke nødvendigvis eksplicit den uafhængige variabel i funktionen, dvs. man skriver ofte f i stedet for $f(x)$. Den afledte funktion mht. x betegnes så

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f \qquad \text{eller} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,.$$

Højere ordens afledte (dvs. differentieret flere gange) skrives som[1]

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\,,\quad \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}\,,\quad \text{osv.}$$

For integraler anvendes faktisk udelukkende Leibniz-notation:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Her findes der ikke en tilsvarende Lagrange-notation.

[1] Det er her værd at bemærke, at $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ er en såkaldt *operator*, dvs. en matematisk operation på funktionen f. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ kan altså ikke opfattes som en almindelig brøk. Specielt er

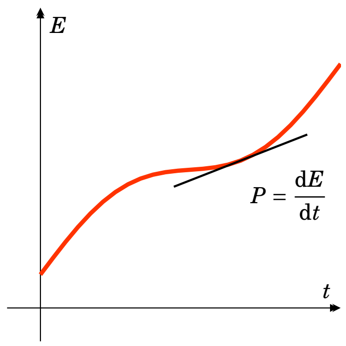
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \neq \frac{f}{x}\,,$$

dvs. *d*'erne kan ikke forkortes væk.

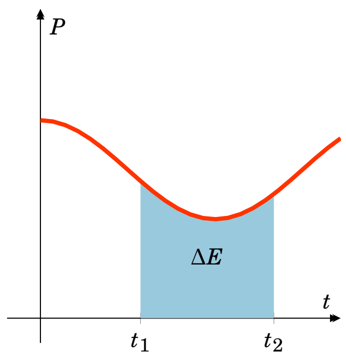
2-1 Differentialer og delta-notation

Leibniz-notation bygger på den tanke, at tangenthældningen i et punkt på grafen for $f(x)$ kan beregnes ved at tage en uendeligt lille tilvækst $\mathrm{d}f$ i funktionsværdien divideret med en uendeligt lille tilvækst $\mathrm{d}x$ i x. De uendeligt små tilvækster $\mathrm{d}f$ og $\mathrm{d}x$ kaldes *differentialer*.

I fysikken regner man ofte med differentialer og tilvækster i flæng. Dvs. man bekymrer sig ikke så meget om, om man skriver Δf og Δx i en formel, eller om man skriver $\mathrm{d}f$ og $\mathrm{d}x$. Herved kan en del af de formler, der udledes i fysikbogen, i stedet skrives vha. differentialkvotienter eller integraler. Dette illustreres bedst med et par eksempler.



Figur 2.1: Effekten er lig tangenthældningen på en (t,E)-graf.



Figur 2.2: Energitilvæksten er arealet under en (t,P)-graf.

Eksempel 2.1
I jeres fysikbog defineres effekt som forholdet mellem energitilvækst og tidsændring, dvs.

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}\,.$$

Dette er i virkeligheden en gennemsnitlig effekt. Hvis man vil kende effekten til et givet tidspunkt, skal man i stedet beregne

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\,. \tag{2.1}$$

Effekten er altså tangenthældningen af en (t,E)-graf, se figur 2.1.

Formlen (2.1) kan omskrives til

$$\mathrm{d}E = P\,\mathrm{d}t\,.$$

Det betyder, at tilvæksten i energi over et tidsrum er

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}E = \int_{t_1}^{t_2} P\,\mathrm{d}t\,.$$

Energiændringen i en given proces fra tiden t_1 til t_2 kan derfor beregnes som arealet under en (t,P)-graf mellem tidspunkterne t_1 og t_2, se figur 2.2.

Eksempel 2.2
Arbejdet, der udføres af en konstant kraft F over strækningen $\Delta s = s_2 - s_1$ er givet ved

$$A = F\,\Delta s\,.$$

Skrives denne formel vha. differentialer får man

$$\mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}s$$

hvilket giver følgende to nyttige formler:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F\,\mathrm{d}s \qquad \text{og} \qquad F = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s}\,,$$

der gælder, uanset om kraften er konstant.

En anden fordel ved Leibniz-notationen set fra en fysikers synspunkt er i øvrigt, at man umiddelbart kan se, hvilken enhed, den afledte funktion har. Notationen $f'(x)$ siger ikke direkte noget om enheden for $f'(x)$. Til gengæld kan man umiddelbart se, at enheden for $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ er enheden for f delt med enheden for x.

Eksempel 2.3
Funktionen $s(t)$ måler strækningen til tiden t. Hvis s måles i meter og tiden t i sekunder, hvad er da enheden for $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$?

Enheden for $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ er enheden for s delt med enheden for t. Da s måles i meter og t i sekunder, måles $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ i meter pr. sekund (m/s).

2-2 Kinetisk energi

Hvis man regner lidt løst med differentialer kan man forholdsvist let udlede et udtryk for den kinetiske energi af et legeme. Den kinetiske energi af et legeme med hastighed v må svare til det arbejde, det kræver at accelerere legemet fra hastigheden 0 til hastigheden v.

Den resulterende kraft er $F = ma$, dvs. arbejdet må være givet ved

$$A = \int_{s(0)}^{s(v)} F \, \mathrm{d}s = \int_{s(0)}^{s(v)} ma \, \mathrm{d}s \,,$$

hvor $s(v)$ er den position, partiklen er i, når den opnår hastigheden v.

Integralet omskrives nu til

$$\int_{s(0)}^{s(v)} ma \, \mathrm{d}s = \int_{s(0)}^{s(v)} m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}s = \int_{s(0)}^{s(v)} m \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}v \,.$$

Idet $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$ kan integralet omskrives til en integration med variablen v. Herved bliver integralets grænser til 0 og v i stedet for $s(0)$ og $s(v)$, og man får

$$\int_{s(0)}^{s(v)} m \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}v = \int_0^v mv \, \mathrm{d}v = \tfrac{1}{2} mv^2 \,.$$

Den kinetiske energi af et legeme med massen m og hastigheden v er derfor givet ved

$$E_{\mathrm{kin}} = \tfrac{1}{2} mv^2 \,.$$

2-3 Konservative kræfter og potentiel energi

En kraft kaldes *konservativ*, hvis det arbejde, den udfører på et legeme, er uafhængigt af, hvilken vej, legemet bevæger sig. Et eksempel herpå er tyngdekraften. I det simple tilfælde nær jordoverfladen, hvor $F_{\mathrm{t}} = -mg$, vil tyngdekraften udføre det samme arbejde på et legeme, hvis højde ændres med h, uanset hvordan legemet flytter sig.

På figur 2.3 ses et legeme, der flytter sig fra P til Q under påvirkning af tyngdekraften. På figuren er der indtegnet 3 forskellige baner for legemets bevægelse. Det arbejde tyngdekraften udfører på legemet, afhænger kun af højdeforskellen mellem P og Q og ikke af den bane, legemet rent faktisk følger på vejen. Derfor er tyngdekraften en konservativ kraft.

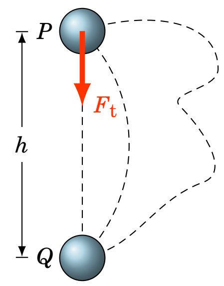
Idet arbejdet ikke afhænger af vejen, kan man beregne tyngdekraftens arbejde ud fra den direkte (lodrette vej) som

$$A = \int_h^0 F_{\mathrm{t}} \, \mathrm{d}x = \int_h^0 mg \, \mathrm{d}x = \Big[mgx \Big]_h^0 = -mgh \,.$$

Ud fra denne beregning giver det mening at definere legemets potentielle energi som

$$E_{\mathrm{pot}} = mgh \,.$$

Herved vil man til enhver tid kunne beregne tyngdekraftens arbejde som $A = -\Delta E_{\mathrm{pot}}$. Til enhver konservativ kraft F kan man på denne måde definere en potentiel energi som



Figur 2.3: Det arbejde, tyngdekraften udfører på et legeme, der flytter sig fra P til Q, afhænger kun af højdeforskellen h og ikke af vejen fra A til B.

Potentiel energi ved positionen s

$$E_{\text{pot}} = -\int_{s_0}^{s} F(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.2}$$

Begyndelsesstedet s_0 vælges, så den potentielle energi her er 0.[2]

[2] Man kan altid selv vælge, hvor nulpunktet for den potentielle energi skal ligge. Typisk vil man vælge den værdi, der giver det simpleste udtryk for E_{pot}.

Vha. formel (2.2) kan man finde udtryk for den potentielle energi i forskellige situationer. Den potentielle energi i et tyngdefelt kan findes ud fra Newtons gravitationslov

$$F_{\text{t}} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,.$$

Her vælger man typisk, at nulpunktet skal ligge, hvor de to legemer er uendeligt langt fra hinanden. Så får man

$$E_{\text{pot}} = \int_{\infty}^{r} G\,\frac{m_1 m_2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-G\,\frac{m_1 m_2}{x}\right]_{\infty}^{r} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r}\,.$$

For en svingende fjeder har man, at kraften er givet ved Hookes lov $F = -kx$. Nulpunktet lægger man typisk, hvor $x = 0$, og så får man[3]

[3] Integrationsvariablen kaldes her for s, fordi x er en af grænserne.

$$E_{\text{pot}} = \int_{0}^{x} ks\,\mathrm{d}s = \left[\tfrac{1}{2}ks^2\right]_{0}^{x} = \tfrac{1}{2}kx^2\,.$$

Rigtigt mange af de kræfter, man ser i fysikundervisningen er konservative kræfter. Undtagelsen fra dette er enhver form for gnidningskraft, hvor arbejdet netop ikke er uafhængigt af vejen, idet en gnidningskraft vil udføre et større arbejde, hvis vejen er længere.

— 3 —

Differentialligninger

Rigtigt mange formler, der anvendes i fysik, kan udledes ved at løse en differentialligning. Når man skal finde bevægelsesligninger, har man f.eks.

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

og Newtons 2. lov $F = ma$. Kender man kraften på et legeme, vil man derfor kunne finde accelerationen, hastigheden eller stedfunktionen ved at løse en differentialligning.[1]

[1] Man kan altid stille problemet op som en differentialligning. Om den så kan løses, afhænger af, hvor vanskelig ligningen er.

3-1 Henfaldsloven

Det er ikke kun mekaniske problemer, der kan løses ved at løse en differentialligning. Henfaldsloven kan også findes på denne måde.

Her ses på et antal radioaktive atomer N, der henfalder. Ethvert atom har lige stor sandsynlighed for at henfalde, dvs. antallet af atomer $\mathrm{d}N$, der henfalder i et lille tidsrum $\mathrm{d}t$ må være proportionalt både med, hvor mange atomer, der er, samt den tid, man måler over, dvs.[2]

[2] k i formlen er en proportionalitetskonstant, og fortegnet for $\mathrm{d}N$ må være negativt, da antallet af atomer falder.

$$\mathrm{d}N = -kN\,\mathrm{d}t\,.$$

Denne ligning kan omskrives til

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -kN\,,$$

som er en differentialligning, der let kan løses. Løsningen bliver gennemgået i matematikundervisningen, så her konstateres bare, at løsningen er

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-kt}\,,$$

idet man ved, at der til tiden $t = 0$ skal være N_0 atomer.

Aktiviteten af en radioaktiv prøve med N atomer defineres som antallet af henfald pr. tid, dvs.[3]

[3] Fortegnet skyldes, at antallet af henfald i et tidsrum er givet ved $-\Delta N$, idet ΔN jo er negativ.

$$A = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = kN_0\mathrm{e}^{-kt} = kN\,.$$

3-2 Harmonisk svingning

Hvis et legeme er påvirket af en kraft, der opfylder Hookes lov

$$F = -kx\,,$$

så kan man vha. Newtons 2. lov opstille ligningen

$$ma = -kx\,,$$

hvilket svarer til differentialligningen

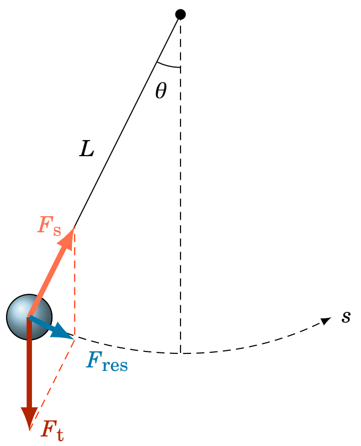
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x\,.$$

Dette er en differentialligning af 2. orden, og sådanne ligninger lærer man ikke at løse i gymnasiet. Derfor anføres løsningen blot her:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)\,,$$

hvor $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, og A og φ er integrationskonstanter.

3-3 Svingende pendul



Figur 3.1: Et svingende pendul.

På figur 3.1 ses et pendul, som svinger. De kræfter, der virker på pendulet, er tyngdekraften F_t og snorkraften F_s. Den resulterende kraft F_{res} er summen af disse to kræfter, og den er parallel med den bue, som pendulet svinger langs med. Man antager, at den snor, pendulet er hængt op i, er masseløs.

Hvis snorens længde er L, må den strækning pendulet bevæger sig, kunne måles ved buelængden s, som afhænger af vinklen θ på følgende måde

$$s = L\theta\,,$$

når blot vinklen måles i radianer. Herved bliver $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = L\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$.

Den resulterende kraft på pendulet kan ud fra en geometrisk analyse af kraftdiagrammet på tegningen bestemmes til[4]

$$F_{res} = F_t\sin(\theta) = -mg\sin(\theta)\,.$$

Idet Newtons 2. lov siger, at $F_{res} = ma = m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$, kan man derfor opstille differentialligningen

$$mL\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin(\theta)\,,$$

dvs.

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{L}\sin(\theta)\,. \tag{3.1}$$

Allerede her kan man se, at pendulets bevægelse ikke afhænger af dets masse, men kun af snorens længde L og tyngdeaccelerationen g. Men differentialligningen (3.1) kan ikke løses analytisk, så man kan ikke uden videre skrive en bevægelsesligning op.

[4]Den resulterende kraft er negativ, idet den er rettet ind mod ligevægtsstillingen.

Hvis θ er en lille vinkel, er det dog sådan, at $\sin(\theta) \approx \theta$. Herved kan ligningen (3.1) omskrives til

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \approx -\frac{g}{L}\theta\,,$$

hvilket er den samme differentialligning som for en harmonisk svingning. Derfor er løsningen

$$\theta(t) \approx A\sin(\omega t + \varphi)\,,$$

hvor $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Svingningstiden for pendulet er så $T = \frac{2\pi}{\omega}$, hvilket fører til den velkendte formel for et penduls svingningstid

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,,$$

der altså kun gælder for små udsving.[5]

[5]Formlen gælder med god tilnærmelse, hvis det maksimale udsving er under ca. 30°.

— 4 —

Vektorer

En del af de ligninger, der udledes i fysikbogen, er i virkeligheden vektorligninger. Formler, der har med bevægelse at gøre, skal som regel skrives som vektorligninger, hvis man skal tale om bevægelser i 3 dimensioner. De størrelser i fysik, der er vektorer er bl.a.:

- Acceleration, hastighed og position; $\vec{a}$, $\vec{v}$ og $\vec{s}$.
- Kraft og bevægelsesmængde; $\vec{F}$ og $\vec{p}$.
- Elektrisk og magnetisk felt; $\vec{E}$ og $\vec{B}$.

Rigtigt mange af de formler, der er udledt i fysikbogen, kan skrives om blot ved at tilføje vektorpile på de relevante variable. Dette gælder for eksempel for stedfunktionen for en bevægelse med konstant acceleration

$$\vec{s} = \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{s}_0 ,$$

definitionen på bevægelsesmængde

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

og Newtons 2. lov

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} .$$

Formlen for arbejde indeholder produktet af to størrelser, der i virkeligheden er vektorer. Her er det nødvendigt med lidt mere analyse af geometrien, før man kan oversætte til vektornotation. Det viser sig dog, at formlen kan skrives direkte med vektorer, hvis man erstatter produktet med skalarproduktet af de to vektorer:

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} .$$

Hvis kraften ikke er konstant, skal arbejdet udregnes vha. et integral, $A = \int F\,\mathrm{d}s$. Dette kan også oversættes til vektornotation, men matematikken involveret går noget ud over almindelig gymnasiematematik, så det får lov at ligge i denne omgang.

4-1 Bevægelse med konstant acceleration

Som eksempel på, hvordan nogle af formlerne skal omskrives, kan man se på bevægelse med konstant acceleration. Hvis accelerationen er den konstante vektor $\vec{a}$, får man disse to udtryk for hastigheden og stedet af et legeme,

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{a}t + \vec{v}_0\\ \vec{s} &= \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{s}_0\,.\end{aligned}$$

Som man kan se, svarer dette fuldstændig til det éndimensionelle tilfælde, bortset fra at der er tilføjet vektorpile til de relevante størrelser.

I princippet er der nu tale om ligninger i tre dimensioner, dvs. for stedfunktionen har man altså i virkeligheden tre udtryk, der er skrevet sammen i én ligning, nemlig

$$\begin{aligned}x &= \tfrac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0\\ y &= \tfrac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_0\\ z &= \tfrac{1}{2}a_z t^2 + v_{0z}t + z_0\,.\end{aligned}$$

I praksis viser det sig dog, at når man har at gøre med en bevægelse med konstant acceleration, er det faktisk kun nødvendigt med højest to dimensioner, når blot man orienterer sit koordinatsystem fornuftigt.

Det éndimensionale tilfælde

Hvis accelerationen $\vec{a}$ og begyndelseshastigheden $\vec{v}_0$ er parallelle, så orienterer man koordinatsystemet sådan, at accelerationen og begyndelseshastigheden ligger langs den samme akse. På denne måde er det kun nødvendigt at regne i én dimension. Man får derfor nøjagtigt de samme ligninger som ovenfor, blot uden vektorpilene.

Et eksempel på dette er f.eks. et lodret kast. Her er accelerationen $a = -g$ og starthastigheden er parallel med denne. Dvs. man får

$$\begin{aligned}v &= -gt + v_0\\ y &= -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0\,.\end{aligned}$$

Her er koordinatsystemet orienteret, så bevægelsen foregår i y-aksens retning.

Det todimensionale tilfælde

Hvis accelerationen og begyndelseshastigheden ikke er parallelle, kan koordinatsystemet orienteres, så accelerationen er parallel med y-aksen, og vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{v}_0$ tilsammen udspænder xy-planen. Derfor er det kun nødvendigt at regne i to dimensioner.

Et legeme, der er udsat for en konstant acceleration, vil så have en position givet ved[1]

$$\vec{s} = \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{s}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x}t + x_0 \\ \tfrac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0 \end{pmatrix}.$$

[1] Accelerationen er $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$, idet koordinatsystemet er orienteret, så accelerationen er parallel med y-aksen.

Ligningerne bliver en smule simplere, hvis man lægger koordinatsystemet sådan, at startpositionen $(x_0, y_0) = (0,0)$. Så får man

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x}t \\ \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t \end{pmatrix} .$$

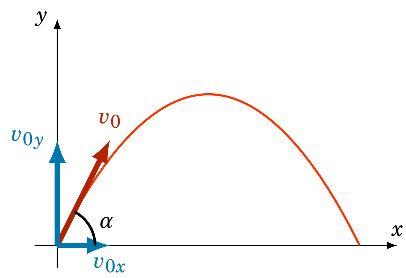
Ud fra dette udtryk kan man udlede, hvordan banekurven ser ud, ved at isolere parameteren t i udtrykket for x

$$x = v_{0x}t \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \frac{x}{v_{0x}} ,$$

og indsætte dette i udtrykket for y

$$y = \frac{1}{2}a\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 + v_{0y}\frac{x}{v_{0x}} = \frac{a}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x . \tag{4.1}$$

Heraf ses, at banekurven er en parabel. Hvis man kalder den vinkel, starthastigheden danner med vandret for α (se figur 4.1), har man



Figur 4.1: Starthastigheden v_0 danner vinklen α med vandret.

$$v_{0x} = v_0\cos(\alpha) \qquad \text{og} \qquad v_{0y} = v_0\sin(\alpha) .$$

Indsætter man det i ligningen (4.1) for banekurven, får man

$$y = \frac{a}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)x .$$

Er der tale om et skråt kast i jordens tyngdefelt, er accelerationen $a = -g$, og både højde og længde af kastet kan udledes af ligningen ovenfor. Dette gælder naturligvis kun, hvis man ser bort fra luftmodstand.

4-2 Jævn cirkelbevægelse

Hvis et legeme bevæger sig i en jævn cirkelbevægelse, er det også kun nødvendigt med to dimensioner for at beskrive bevægelsen. Hvis koordinatsystemet orienteres, så cirklens centrum ligger i $(0,0)$, vil legemets position være givet ved

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix} . \tag{4.2}$$

At banekurven virkelig er en cirkel ses ved at beregne

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (r\cos(\omega t))^2 + (r\sin(\omega t))^2 = r^2\cos^2(\omega t) + r^2\sin^2(\omega t) \\ &= r^2(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) = r^2 . \end{aligned}$$

Altså er banekurven givet ved ligningen $x^2 + y^2 = r^2$, der jo netop er ligningen for en cirkel med radius r.

Hvis man vil finde hastigheden og accelerationen af legemet, differentieres udtrykket (4.2), dvs.[2]

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ r\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix} = \omega\,\widehat{\vec{s}} ,$$

[2]Man differentierer en vektor ved at differentiere koordinaterne hver for sig.

og

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ r\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos(\omega t) \\ -r\omega^2\sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2\vec{s}\,,$$

Ser man kun på størrelserne af vektorerne får man herudfra de velkendte formler

$$v = \omega r \qquad \text{og} \qquad a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}\,.$$

En anden ting, man kan se af udregningerne ovenfor, er, at idet $\vec{a} = -\omega^2\vec{s}$, er den resulterende kraft i bevægelsen givet ved

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{s}\,.$$

Det betyder, at

1. kraften er modsat rettet positionen, dvs. den resulterende kraft i en jævn cirkelbevægelse peger ind mod cirklens centrum, og

2. en jævn cirkelbevægelse opfylder differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{s}}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\vec{s}\,.$$

— A —

Usikkerhedsberegninger

Der findes flere måder at lave usikkerhedsberegninger på. Den første metode, der gennemgås i dette kapitel anvendes til at vurdere usikkerheden på en værdi, der er et resultat af beregninger på målte størrelser.

Har man i stedet målt den samme størrelse mange gange, kan man ved hjælp af statistiske metoder vurdere, hvor stor den sande størrelse er, og hvor stor usikkerheden er. Dette gennemgås til sidst i kapitlet.

A-1 Sammensatte målinger

Antag at man skal finde summen s af de to længder x og y på figur A.1. Hvis man måler med en lineal, hvor måleusikkerheden er 0,5 mm, hvor stor bliver så usikkerheden på resultatet s?

Dette kan man finde ud af ved det, man kalder »max-min-metoden«. Hvis man f.eks. måler, at

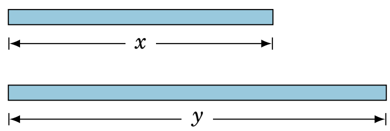
$$x = 35\,\text{mm} \pm 0{,}5\,\text{mm} \qquad \text{og} \qquad y = 51\,\text{mm} \pm 0{,}5\,\text{mm}\,,$$

så betyder det, at den rigtige værdi for x ligger i intervallet

$$[34{,}5\,\text{mm}; 35{,}5\,\text{mm}]\,,$$

og at den rigtige værdi for y ligger i intervallet

$$[50{,}5\,\text{mm}; 51{,}5\,\text{mm}]\,.$$



Figur A.1: Summen af de to længder x og y måles.

Ideen er nu at vurdere, hvor stor summen s maksimalt og minimalt kan blive. Den størst mulige værdi for s må man få, når man lægger de største værdier fra intervallerne sammen, dvs.

$$s_{\text{max}} = x_{\text{max}} + y_{\text{max}} = 35{,}5\,\text{mm} + 51{,}5\,\text{mm} = 87{,}0\,\text{mm}\,.$$

Vha. samme argumentation finder man $s_{\text{min}} = 86{,}0\,\text{mm}$, dvs.

$$s = 86{,}5\,\text{mm} \pm 1{,}0\,\text{mm}\,.$$

Gennemgår man argumenterne, kan man se at usikkerheden Δs på $s = x + y$, må være givet ved

$$\Delta s = \Delta x + \Delta y\,.$$

Tabel A.2: Beregninger af absolutte og relative usikkerheder.
Alle de størrelser, der indgår i formlerne, er positive. De skal erstattes med deres absolutte værdier, hvis dette ikke er tilfældet.

Størrelse	Absolut usikkerhed	Relativ usikkerhed
$s = x + y$	$\Delta s = \Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x + y}$
$s = x - y$	$\Delta s = \Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x - y}$
$s = xy$	$\Delta s = y\,\Delta x + x\,\Delta y$	$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
$s = \frac{x}{y}$	$\Delta s = \frac{y\,\Delta x + x\,\Delta y}{y^2}$	$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
$s = x^n$	$\Delta s = n x^{n-1}\,\Delta x$	$\frac{\Delta s}{s} = n\,\frac{\Delta x}{x}$

På samme måde kan man finde usikkerhederne i en række andre tilfælde af sammensætninger af målestørrelser, se tabel A.2.

Som man kan se i tabellen er det ofte lettere at regne på de relative usikkerheder frem for de absolutte.

Her følger et enkelt eksempel på metoden i brug.

Eksempel A.1
Man kan bestemme densiteten af en væske ved at foretage samtidige målinger af rumfanget og massen af noget af væsken. Dette kan gøres meget simpelt vha. et måleglas og en vægt. Antag, at man ved en sådan måling finder

$$V = 57{,}5\,\text{ml} \pm 0{,}5\,\text{ml} \quad \textit{og} \quad m = 45{,}03\,\text{g} \pm 0{,}01\,\text{g}\,,$$

hvor tallene $\Delta V = 0{,}5\,\text{ml}$ *og* $\Delta m = 0{,}01\,\text{g}$ *angiver usikkerheden på målingerne i hhv. måleglasset og på vægten.*

Først bestemmes en værdi for densiteten ρ

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{45{,}03\,\text{g}}{57{,}5\,\text{ml}} = 0{,}783\,\text{g/ml}\,.$$

Herefter ser man på usikkerheden. Densiteten beregnes vha. formlen $\rho = \frac{m}{V}$*, dvs. den relative usikkerhed på densiteten er*

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\rho}{\rho} &= \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V} \\ &= \frac{0{,}01\,\text{g}}{45{,}03\,\text{g}} + \frac{0{,}5\,\text{ml}}{57{,}5\,\text{ml}} = 8{,}92\cdot 10^{-3}\,.\end{aligned}$$

Den absolutte usikkerhed er så

$$\Delta\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho}\cdot\rho = 8{,}92\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}783\,\text{g/ml} = 0{,}007\,\text{g/ml}\,.$$

Den rigtige densitet af væsken med usikkerhedsangivelse er så

$$\rho = 0{,}783\,\text{g/ml} \pm 0{,}007\,\text{g/ml}\,.$$

A-2 Usikkerhed ved flere målinger

Jo flere målinger man har af den samme størrelse, jo mere præcist bliver resultatet.

Har man en række målinger $x_1, \ldots, x_n$ af en størrelse, så beregner man middelværdien $\overline{x}$ og usikkerheden Δx som

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}.$$

Man kan vise ved en matematisk analyse, at usikkerheden på middelværdien er givet ved

$$\Delta\overline{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}},$$

dvs. jo flere tal man måler, jo mindre bliver denne usikkerhed.

Den målte værdi for størrelsen vil da være

$$x = \overline{x} \pm \Delta\overline{x}.$$

Her følger et eksempel på anvendelsen af formlerne.

Tabel A.3: 5 målinger af opdriften på et lod nedsænket i vand.

Måling	F_{op} / µN
1	490
2	491
3	494
4	488
5	495

Eksempel A.2
Ved målinger af opdriften F_{op} på et lod nedsænket i vand får man målingerne i tabel A.3.

Middelværdien er

$$\overline{F}_{op} = \tfrac{1}{5} \cdot (490\,\mu\mathrm{N} + 491\,\mu\mathrm{N} + 494\,\mu\mathrm{N} + 488\,\mu\mathrm{N} + 495\,\mu\mathrm{N}) = 492\,\mu\mathrm{N}.$$

Usikkerheden er

$$\Delta F_{op} = \frac{F_{op,\,max} - F_{op,\,min}}{2} = \frac{495\,\mu\mathrm{N} - 488\,\mu\mathrm{N}}{2} = 3{,}5\,\mu\mathrm{N},$$

så usikkerheden på middelværdien er

$$\Delta\overline{F}_{op} = \frac{\Delta\overline{F}_{op}}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}5\,\mu\mathrm{N}}{\sqrt{5}} = 2\,\mu\mathrm{N}.$$

Den sande værdi for opdriften må derfor ligge i intervallet

$$F_{op} = 492\,\mu\mathrm{N} \pm 2\,\mu\mathrm{N}.$$

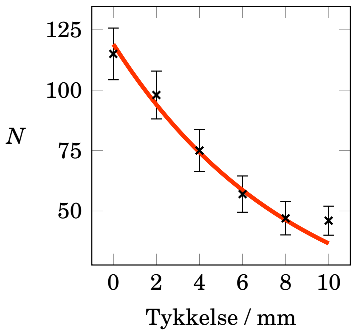
A-3 Usikkerhed på tælletal

Ved målinger på radioaktive grundstoffer med et Geiger-Müller-rør får man et tælletal som resultat. Da dette tælletal er resultatet af en stokastisk proces, må man antage at de tælletal, man får for målinger i et bestemt tidsinterval Δt er normalfordelte med middelværdi $\overline{N}$ og spredning $\sqrt{\overline{N}}$.

Måler man kun et enkelt tal er usikkerheden på dette tælletal N givet ved $\sqrt{N}$.

Tabel A.4: Tælletal for en radioaktiv kilde som funktion af tykkelsen af blyplader mellem kilden og detektoren.

Tykkelse / mm	N	$\sqrt{N}$
0	115	10,7
2	98	9,9
4	75	8,7
6	57	7,5
8	47	6,9
10	36	6,0



Figur A.5: Graf over tælletallet som funktion af den samlede tykkelse af blypladerne. Usikkerhederne på de enkelte tælletal er angivet på grafen som error bars.

Eksempel A.3

I tabel A.4 ses en række tælletal for en radioaktiv kilde. Tælletallene er målt ved at lade et Geiger-Müller-rør måle over et tidsinterval på $\Delta t = 60$ s. *Herefter er der indsat blyplader mellem kilden og detektoren og målt igen.*

Usikkerheden på det enkelte tælletal er angivet i tabellen. Denne er beregnet som $\sqrt{N}$*, jf. gennemgangen ovenfor.*

Hvis dette skal afbildes grafisk, afsættes de enkelte punkter fra tabellen i et koordinatsystem. Usikkerheden vises ved at indsætte såkaldte »error bars«, der dækker intervallet $N \pm \sqrt{N}$.

På grafen er også indtegnet grafen for den eksponentielle funktion, der passer bedst på punkterne. Som man kan se, går grafen gennem alle de dækkede intervaller på nær det sidste, hvilket nok skyldes, at tælletallene her er så små, at man i virkeligheden burde have målt over et større tidsinterval for at få en pålidelig måling.

— B —

Løsning af fysikopgaver

Der gives intet sted i fysikbogen eller i eksamenssættene en beskrivelse af, hvad der egentlig forventes af en opgavebesvarelse. Derfor kommer der her en gennemgang af, hvordan man bedst muligt stiller en god besvarelse op.

1. Når man skal skabe overblik over en opgave, er det altid en god ide at tegne en skitse over problemstillingen. På skitsen skriver man opgavens oplysninger som ligninger.

   Hvis der f.eks. i opgaven står, at »massen er 2,3 kg«, skriver man $m = 2{,}3\,\mathrm{kg}$ på figuren.

   Anvend altid så vidt muligt standardnotation for størrelser, idet det gør en besvarelse lettere at læse. Det vil altså sige m for masse, p for tryk, T for temperatur, osv.

2. Skriv altid anvendte formler op både med symboler og med indsatte værdier – og forklar, hvorfor det netop er disse formler, der anvendes.

3. Hvis det i en opgave er nødvendigt at skelne mellem to forskellige størrelser af samme type, f.eks. en temperatur ude og en temperatur inde, gøres det med velvalgte indices, T_{ude} og T_{inde}.

   Husk altid at forklare, hvad de forskellige størrelser og indices betyder.

4. For at løse en opgave kan det være nødvendigt at lave nogle forenklende antagelser. Disse antagelser er ikke altid eksplicit angivet i opgaven. Husk derfor at forklare, hvilke antagelser der er gjort undervejs.

5. Grafer, der er en del af besvarelsen, skal altid være forsynet med overskrifter og størrelser på akserne. Husk også altid at kommentere på graferne.

6. Se altid besvarelsen igennem til sidst for at se, om der er enheder på alle størrelser, og resultater er angivet med det rigtige antal betydende cifre (se nedenfor).

Som det gælder for enhver anden formidling, skal man selvfølgelig også sørge for, at den forklarende tekst, der er en del af opgaven, er i et præcist og velformuleret sprog.

B-1 Betydende cifre

Når man læser et resultat af en beregning, vil man altid antage, at usikkerheden ligger på det sidste ciffer. Hvis f.eks. en energi angives som $E = 34{,}2\,\mathrm{J}$, kan den rigtige energi være 34,1 J eller 34,3 J, men ikke 35 J.

Skriver man derimod $E = 34{,}20\,\mathrm{J}$, har man sagt, at den sande energi kan være $E = 34{,}21\,\mathrm{J}$ eller $E = 34{,}19\,\mathrm{J}$, men ikke 34,1 J.

Et resultat skal altid angives med samme antal betydende cifre som den mindst præcise størrelse, der indgår i beregningen.

Beregner man f.eks. et areal af en cirkel ud fra en radius på $r = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ får man

$$A = \pi \cdot r^2 = 3{,}14159265359 \cdot (5{,}0\,\mathrm{cm})^2 = 79\,\mathrm{cm}^2\,,$$

og ikke 78,5398163397, som lommeregneren giver.

B-2 Typografi og Word

Standarden inden for alle naturvidenskaberne er, at der skelnes mellem størrelser og enheder ved, at størrelser er skrevet med kursiv, mens enheder ikke er. Dvs. man skriver

$$I = 3\,\mathrm{A} \quad \text{og ikke} \quad \cancel{I = 3A}$$

Dette gøres ikke automatisk i Words formeleditor, men det er faktisk forholdsvist simpelt at få opretstående tekst i formler. Man skal blot skrive teksten ind i citationstegn, dvs. `I=3"A"` i stedet for `I=3A`.